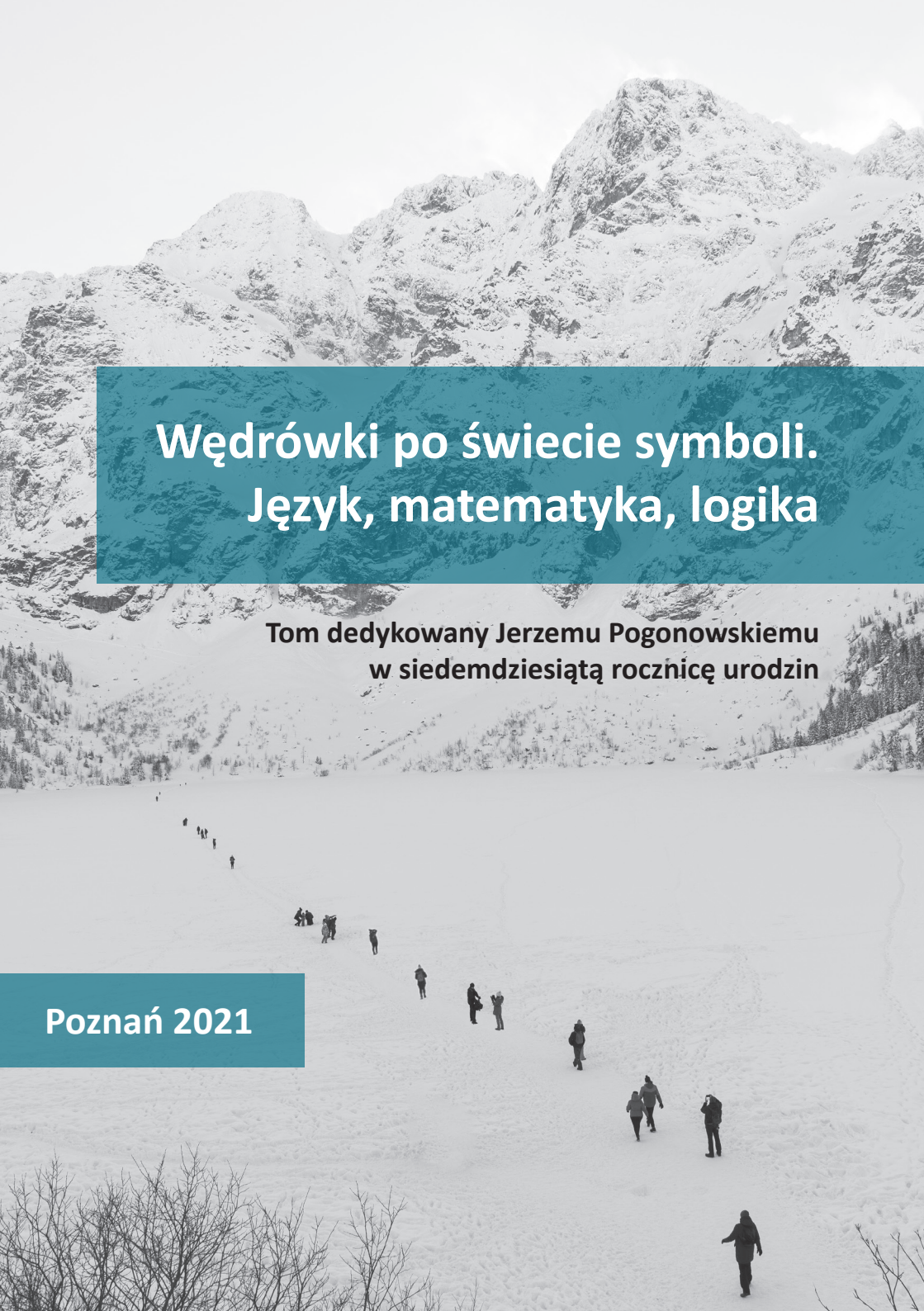


Wędrówki po świecie symboli. Język, matematyka, logika

Tom dedykowany Jerzemu Pogonowskiemu w siedemdziesiątą rocznicę urodzin

Poznań 2021

Wędrówki po świecie symboli. Język, logika, matematyka

Wędrówki po świecie symboli. Język, logika, matematyka

Tom dedykowany Jerzemu Pogonowskiemu
w siedemdziesiątą rocznicę urodzin

wydawnictwo

Poznań 2021

Projekt okładki:
Katarzyna Chlebowska

Redakcja:
Dorota Leszczyńska-Jasion, Paweł Łupkowski, Andrzej Gajda, Szymon Chlebowski

Redakcja techniczna i korekta:
Sebastian Surendra

Recenzja:
dr hab. Marek Nasieniewski prof. UMK

Copyright by:
Autorzy

Copyright by:
Wydawnictwo Rys

Wydanie I

Poznań 2021

ISBN 978-83-66666-70-2

DOI 10.48226/978-83-66666-70-2

Wydanie:

Wydawnictwo Rys
ul. Kolejowa 41
62-070 Dąbrówka
tel. 600 44 55 80
e-mail: tomasz.paluszynski@wydawnictworys.com
www.wydawnictworys.com

Przedmowa

Istota matematyki zawiera się w jej wolności. Profesor Pogonowski często przywołuje to sformułowanie Georga Cantora. Gdybym miała w skrócie scharakteryzować przedmiot naukowych dociekań na przestrzeni całego naukowego życia Pracownika Jerzego Pogonowskiego (jak czasami o sobie mówi), to powiedziałabym, że Pracownik Jerzy Pogonowski zajmował się badaniem Wolności. I że były to, i są również dziś, Piękne Badania.

Ogromna rozpiętość tematyczna, ale też stylistyczna i językowa, tekstów zawartych w tym tomie jest odzwierciedleniem rozmaitości zainteresowań Profesora Jerzego Pogonowskiego i – co tu dużo mówić – Jego nietuzinkowej osobowości. Tom otwierają artykuły z zakresu *algebry* (Ivo Düntsch i Wojciech Dzik) oraz *unifikacji* w logikach modalnych (Zofia Kostrzycka i Piotr Wojtylak). Kolejne dwa teksty – Mieczysława Omyły oraz Joanny Golińskiej-Pilarek – dotyczą *logiki niefregowskiej*, wprowadzonej do światowej literatury przez Romana Suszkę. Następne dwa artykuły – Andrzeja Indrzejczaka i Andrzeja Wiśniewskiego – poświęcone są probematyce *teorii dowodu*. Do tradycyjnych zagadnień *logiki*, tym razem *nazw*, nawiązuje Anna Pietryga. Tekst Janusza Kaczmarka dotyczy *formalnej ontologii*, uprawianej przy pomocy narzędzi topologicznych. Artykuły Adama i Michała Kolanych można ulokować w dziedzinie *logiki obliczeniowej*. Roman Murawski pisze o fundamentalnych zagadnieniach *filozofii matematyki*, Władysław Zabrocki – o *intuicji językowej*. Alfred Majewicz opisuje m.in. fascynującą historię *języka ningueño* oraz kilka innych ciekawych dokonań Jubilata w zakresie *językoznawstwa*. Tekst Joanny Grygiel dotyczy *tolerancji* – obiektów abstrakcyjnych stosowanych m.in.

w językoznawstwie. Tekst Katarzyny Grygiel – *logiki kombinatorycznej*, o której dużo dowiemy się z książki Raymonda Smullyana przetłumaczonej na j. polski przez Jerzego Pogonowskiego. Robert Sochacki porusza problematykę *dydaktyki matematyki*, która jest bardzo bliska Jubilatowi w ostatnich latach. Ostatni tekst zamieszczony w tym tomie jest pięknym wspomnieniem Mirosława Górnego o wspólnych wędrówkach z Jerzym Pogonowskim. We wszystkich wyszczególnionych tu dziedzinach wiedzy Jerzy Pogonowski czuje się swobodnie, w każdej ma ważne osiągnięcia – jeśli nie w postaci oryginalnego wkładu naukowego, to w formie opracowań dydaktycznych, przekładów cennych pozycji na język polski, recenzji, komentarzy. Nie umiałam inaczej podsumować tej zaskakującej naukowej panoramy niż tytułem nadanym części pierwszej: Od matematycznej wolności po niewyrażalną tęsknotę (za modelem zamierzonym). Przypuszczam, że każdemu z nas – uczniów, współpracowników, przyjaciół Profesora Pogonowskiego – przychodzi do głowy inny pomysł na podsumowanie tej imponującej działalności...

Wszystkiego najlepszego, Panie Profesorze!

Poznań,
październik 2021 *Dorota Leszczyńska-Jasion*

Koraliki Jerzego Pogonowskiego

Mariusz Urbański

Skrzaty, które nizają koraliki zdarzeń, skutki po przyczynach, a które zwykle zbiorczo nazywamy losem, lubią zaskakiwać. Czasem chodzi o żarty, a czasem o zwykłe niespodzianki. Nawlekają jeden za drugim, a potem się przyglądają: „Nie spodziewałeś się, co? A tu proszę". Niezwykle uradować musiał się ten, który w 2015 roku wpadł na pomysł, żeby Profesor Jerzy Pogonowski podjął pracę w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki ówczesnego Instytutu Psychologii na Wydziale Nauk Społecznych Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Wcześniej chodziliśmy na seminaria do Zakładu Profesora w Instytucie Językoznawstwa UAM, oczywiście. Spotykaliśmy Profesora na konferencjach – w Zakopanem, w Szklarskiej Porębie, w Krakowie – od kiedy tylko zaczęliśmy na nie jeździć, bo przecież On był na nich z naszego punktu widzenia od zawsze: z nowym pomysłem, świeżym odkryciem, głębszym wglądem, mocny punkt programu tych spotkań zarówno w wymiarze naukowym, jak i towarzyskim. Czytaliśmy Jego prace – czasem odkrywając je sami, ale równie często z polecenia bardziej oczytanych koleżanek i kolegów, bo przecież: „a, jak o tym chcesz pisać, to weź najpierw przeczytaj taki artykuł Pogonowskiego...". Pogonowski przewijał się też na zajęciach – a to na *Wstępie do logiki* było potrzeba dobrego źródła do podstaw językoznawstwa, a to na *Językoznawstwie* ugruntowania obliczeniowej refleksji, a to na kolejnych kursach logiki zaawansowanych zadań (nieocenione tłumaczenie zbioru ćwiczeń Ławrowa i Maksimowej!), a to tłumaczeń klasycznych niemieckich tekstów matematycznych Hilberta, Höldera, Heinego, Webera, Dedekinda, Cantora czy też logicznych zagadek Smullyana. Czasem Profesor siedział jako recenzent na obronie roz-

prawy doktorskiej – co prawda nieco chmurny, bo jednak doktorant mógłby więcej rozumieć z tego, co się doń mówi (tą intelektualną krnąbrnością wykazywał się akurat niżej podpisany), ale jednak życzliwy.

Ta życzliwość, niepohamowana i szczera, to zresztą stały motyw opowieści o Jerzym Pogonowskim, zawsze też idąca w parze z otwartością. Pogonowski zawsze wysłucha, choćby i najbardziej szalonego pomysłu, zawsze osadzi w historycznym kontekście dzięki swojej przeogromnej erudycji, zawsze wskaże, co by tu warto poprawić albo dodać, a tam ewentualnie ująć. Student, uczeń, współpracownik – wszyscy są tak samo ważni, od wszystkich można się czegoś nauczyć, każdy wnosi w świat wartość godną docenienia. „On sprawia, że każdy czuje się istotny", powiedział o Profesorze jeden z Jego studentów. Dokładnie tak.

Otwartość ma też inny aspekt – dzielenia się ze światem i to w kilku wymiarach. Poczynając od tego najprostszego, który nie zawsze jest najłatwiejszy, mianowicie mówienia tego, co się myśli. Jerzy Pogonowski potrafi być subtelny jak nikt inny, jeśli widzi powód, ale jeśli nie – to nie. Otwartość to także podejmowanie w pracy badawczej tematów nieoczywistych, takich jak na przykład rozważania o roli błędów i błądzenia w nauce, o ważkiej roli metafor i intuicji w rozwoju matematyki i w jej nauczaniu, o znaczeniu prostej ciekawości. Otwartość to wreszcie radość odkrywania piękna matematycznego świata dla studentów i wraz z nimi. Bardzo się cieszę, że nasz Wydział mógł przyczynić się do wydawniczej ofensywy Profesora, wspierając w ostatnich latach publikację kilku jego książek, i że kolejne – podręczniki – czekają w kolejce.

Wiele zawdzięczamy temu pomysłowemu skrzatowi, dzięki któremu Jerzy Pogonowski znalazł się na Wydziale Psychologii i Kognitywistyki UAM. Z wielką radością będziemy mu też zawdzięczać jeszcze więcej. *Ad multos annos*, Panie Profesorze!

Mariusz Urbański
Dziekan Wydziału Psychologii i Kognitywistyki UAM

Tabula Gratulatoria

Do życzeń przyłączają się

Katarzyna Adamczyk
Lucyna Bakiera
Jerzy Bańczerowski
Maria Beisert
Piotr Błaszczyk
Izabela Bondecka-
-Krzykowska
Anna Izabela Brzezińska
Jerzy Marian Brzeziński
Dorota Brzozowska
Mikołaj Buchwald
Wojciech Buszkowski
Teresa Chirkowska-Smolak
Szymon Chlebowski
Lidia Cierpiałkowska
Janusz Czelakowski
Marta Dixa
Ivo Düntsch
Wojciech Dzik
Andrzej Gajda
Marta Gawek
Joanna Golińska-Pilarek
Mirosław Górny
Rafał Gruszczyński
Joanna Grygiel
Katarzyna Grygiel
Andrzej Indrzejczak
Tomasz Jarmużek
Marcin Jukiewicz
Konrad Juszczyk
Janusz Kaczmarek
Victoria Kamasa
Maciej Kandulski
Andrzej Klawiter

Adam Kolany

Michał Kolany

Mirosława Kołowska-
-Gawiejnowicz

Barbara Konat

Zofia Kostrzycka

Grzegorz Króliczak

Patrycja Kupś

Dorota Leszczyńska-Jasion

Dorota Lipowska

Krzysztof Łastowski

Piotra Łobacz

Piotr Łukowski

Paweł Łupkowski

Witold Maciejewski

Marek Magdziak

Alfred F. Majewicz

Grzegorz Malinowski

Jacek Malinowski

Roman Murawski

Marek Nasieniewski

Piotr Nowak

Paweł Nowakowski

Agnieszka Nowik

Monika Obrębska

Mieczysław Omyła

Jacek Paluchowski

Anna Pietryga

Łukasz Przybylski

Adam Putko

Maciej Raś

Sławomir Sikora

Anna Słysz

Robert Sochacki

Michał Sochański

Agata Tomczyk

Mariusz Urbański

Aleksandra Wasielewska

Andrzej Wiśniewski

Piotr Wojtylak

Urszula Wybraniec-
-Skardowska

Michał Wyrwa

Władysław Zabrocki

Monika Zielona-Jenek

Jan Zygmunt

Natalia Żyluk

Spis treści

Przedmowa ix

Mariusz Urbański
Koraliki Jerzego Pogonowskiego xi

Tabula Gratulatoria xiii

Część I. Od matematycznej wolności po niewyrażalną tęsknotę (za modelem zamierzonym)

Ivo Düntsch, Wojciech Dzik
Ideal algebras: A generalization of monadic algebras 3

Zofia Kostrzycka, Piotr Wojtylak
Unifikacja w symetrycznych logikach modalnych 13

Mieczysław Omyła
Logika Suszki a argument „jak z procy” 25

Joanna Golińska-Pilarek
Dedukcyjne dylematy: przypadek niefregowski 43

Andrzej Indrzejczak
Axioms, hypotheses and rules; methodological considerations 77

Andrzej Wiśniewski
Erotetic calculi for Classical Propositional Logic and reduction to normal forms 97

Anna Pietryga
Dwie dyskursywne metody rozstrzygania ważności trybów tradycyjnego sylogizmu 109

Janusz Kaczmarek
Language and concepts. From linear to structural concepts 121

Adam Kolany
`BREAKUP` **algorithm in the general setting** 139

Adam Kolany, Michał Kolany
Few applications of ordinal recursion 145

Roman Murawski
Mathematics *vs* reality. A note on applicability of mathematics 157

Władysław Zabrocki
Kilka uwag wokół intuicji językowej. Z okazji 70. rocznicy urodzin Profesora Jerzego Pogonowskiego 171

Alfred F. Majewicz
Świsłocz. Commemorationes Professori Georgio Pogonowski Septuagenario Oblatae 179

Joanna Grygiel
Gdzie jest najwięcej tolerancji? 201

Katarzyna Grygiel
Jaki to ptak, czyli czy Jerzy Pogonowski ma postać normalną? 209

Robert Sochacki
Fantazje matematyczno-dydaktyczne lingwisty 219

Mirosław Górny
Z logikiem w puszczy 239

Część II. Pracownik Jerzy Pogonowski

Lista publikacji 251

Lista recenzji 271

Lista wypromowanych doktoratów 277

Udział w projektach badawczych 279

Część I.
Od matematycznej wolności po niewyrażalną tęsknotę (za modelem zamierzonym)

Ideal algebras: A generalization of monadic algebras

Ivo Düntsch, Wojciech Dzik

The second author wishes to thank Professor Jerzy Pogonowski for encouraging him to write his habilitation book [7] *and for continuing interest in its development.*

Abstract We present the class IdA of ideal algebras and the variety it generates which is a generalization of the class of Boolean unary discriminator algebras and its generated variety, the monadic algebras. We investigate the properties of ideal algebras and the variety they generate, with particular emphasis on its relation to monadic algebras, including its basic algebraic properties, the logic it generates, free and projective objects, as well as unitary unification.

1 Introduction

A *(unary) discriminator* on a non-trivial Boolean algebra B is a function $f : \mathsf{B} \to \mathsf{B}$ for which

Ivo Düntsch e-mail: duentsch@brocku.ca
Department of Computer Science, Brock University, St Catharines, ON, L2S 3A1, Canada

Wojciech Dzik e-mail: wojciech.dzik@us.edu.pl
Institute of Mathematics, University of Silesia, Katowice, Poland

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The class D of discriminator algebras generates the variety of monadic algebras which was introduced by Halmos in [11] "to make algebra out of logic" or , in more details, "to make algebra out of first order monadic functional calculus". It turned out that $\mathtt{Eq}(\mathsf{D})$ is the class of algebraic models of the modal logic **S5**. Furthermore, $\mathtt{Eq}(\mathsf{D})$ is the class of cylindric algebras of dimension 1. The set B^c of closed elements, that is, the set of fixed points of f, is just $\{0, 1\}$. Generalizing this situation we consider Boolean algebras with an operator f for which B^c has the form $I \cup \{1\}$ where I is an ideal of B. In this paper we shall review the class of these algebras and some of their properties as presented in [6] with an emphasis on their similarities and dissimilarities to monadic algebras. We also shall announce some new results from [5]. Our general reference for Boolean algebras is [14], for universal algebra [4], and [3] for modal logic, where unexplained notation can be found.

2 Ideal algebras

2.1 General properties

If K is a class of algebras of the same signature, we denote by $\mathtt{Eq}(K)$ the variety generated by K. With some abuse of notation we shall usually refer to an algebra just by its universe. If Λ is a logic, $\mathtt{Eq}(\Lambda)$ denotes the class of its algebraic models.

An *ideal algebra* $\langle B, f\rangle$ is a Boolean algebra $\langle B, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$ enhanced by a closure operator $f : B \to B$ such that the set B^c of closed elements has the form $I \cup \{1\}$ for some ideal I of B. Thus,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \in I, \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We denote by **2** the two element Boolean algebra augmented by the identity operator. The class of ideal algebras is denoted by IdA. If $I = \{0\}$, then B is

a discriminator algebra, and if $\mathrm{I} = \mathrm{B}$, then f is the identity. In the sequel we suppose that $\langle \mathrm{B}, \mathrm{f} \rangle$ is a non-trivial ideal algebra with determining ideal I.

Our first observation exhibits two properties of the class of ideal algebras shared with D:

Theorem 1. [6, Theorem 3.1]

1. IdA *is a positive universal class.*
2. $\mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{IdA})$ *is locally finite.*

The subdirectly irreducible algebras in $\mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{IdA})$ come in two forms:

Theorem 2. [6, Theorem 3.2]
$\mathrm{B} \in \mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{IdA})$ *is subdirectly irreducible if and only if* B *is a discriminator algebra or* I *is generated by an atom.*

In $\mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{D})$ the properties of being simple, directly indecomposable, and subdirectly irreducible are equivalent. In $\mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{IdA})$, these classes differ:

Theorem 3. [5]
$\mathrm{B} \in \mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{IdA})$ *is directly indecomposable if and only if* $\mathrm{B} \in \mathsf{IdA}$.

A characterization of the finite monadic algebras was given by Bass [2]. Clearly, a finite discriminator algebras is determined by the number of its atoms. For IdA we need another parameter:

Theorem 4. [6]
Each finite ideal algebra is determined by the pair $\langle \mathfrak{k}, \mathfrak{m} \rangle$ *where* $\mathfrak{k}$ *is the number of closed atoms, and* $\mathfrak{m}$ *the number of non-closed atoms.*

Thus, a finite ideal algebra is determined by a partition of the set of its atoms. The two element algebra has the characteristic $\langle 1, 0 \rangle$, discriminator algebras with at least two atoms are characterized by the pairs $\langle 0, \mathfrak{n} \rangle$, where $\mathfrak{n}$ is the number of atoms, and non-simple subdirectly irreducible algebras by $\langle 1, \mathfrak{m} \rangle$. Denoting the variety generated by the algebra with parameters $\langle \mathfrak{n}, \mathfrak{m} \rangle$ by $\mathbb{E}\mathrm{q}(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ we obtain the following diagram which depicts the fine structure of the varieties $\mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{D})$ and $\mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{IdA})$ and their connection:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{E}\mathrm{q}(0,1) & \subsetneq & \mathbb{E}\mathrm{q}(0,2) & \subsetneq \ldots \subsetneq & \mathbb{E}\mathrm{q}(0,\mathfrak{m}) & \ldots & \mathbb{E}\mathrm{q}(0,\omega) & = & \mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{D}) \\
\cap\!\!\!\!| & & \cap\!\!\!\!| & & \cap\!\!\!\!| & & \cap\!\!\!\!| & & \\
\mathbb{E}\mathrm{q}(1,1) & \subsetneq & \mathbb{E}\mathrm{q}(1,2) & \subsetneq \ldots \subsetneq & \mathbb{E}\mathrm{q}(1,\mathfrak{m}) & \ldots & \mathbb{E}\mathrm{q}(1,\omega) & = & \mathbb{E}\mathrm{q}(\mathsf{IdA})
\end{array}$$

It was shown by Monk [15] that the lattice of varieties of monadic algebras is the chain of type $\omega + 1$ shown in the upper row. An analogous result for $\mathsf{Eq}(\mathsf{IdA})$, however, does not hold: Just consider, for example, $\mathsf{Eq}(1, m) \vee \mathsf{Eq}(0, m + 2)$ and $\mathsf{Eq}(1, m + 1) \vee \mathsf{Eq}(0, m + 1)$ of $\mathsf{Eq}(\mathsf{IdA})$ which are incomparable subvarieties of $\mathsf{Eq}(\mathsf{IdA})$.

2.2 Canonical frames and the logic S4.4

The description of a finite ideal algebra in Theorem 4 is reflected in the nature of the canonical frames of finite ideal algebras. Recall that the canonical frame $\mathsf{Cf}(B)$ of B is the relational structure $\langle \mathrm{Ult}(B), R_f \rangle$ where $\mathrm{Ult}(B)$ is the set of ultrafilters of B, and $F \; R_f \; G$ if and only if $f[G] \subseteq F$ for all $F, G \in \mathrm{Ult}(B)$.

Theorem 5. [6, Theorem 3.7]
Suppose that $B \in \mathsf{IdA}$ *is finite with determining ideal* $I = {\downarrow} \, b$. *Then, the canonical frame of* B *has at most two levels* $L^1 = \{F \in \mathrm{Ult}\, B : b \in F\}$ *and* $L^2 = \{F \in \mathrm{Ult}(B) : b \notin F\}$. *Furthermore,*

$$R_f = (L^1 \times L^2) \cup (L^2 \times L^2) \cup 1'. \tag{1}$$

Clearly, $L^1 = \varnothing$ if f is the discriminator, and $L^2 = \varnothing$ if f is the identity. Otherwise, R_f is depicted in Figure 1. If B is not simple and subdirectly irreducible, then L^1 consists of exactly one element and L^2 of at least one element. A frame $\langle W, R \rangle$ satisfies (1) if and only if R is a quasi-order that satisfies (2):

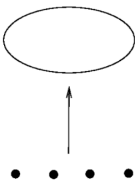


Figure 1. The canonical relation of a proper non-trivial ideal algebra

$$(\forall x, y, z)[xRy \text{ and } xRz \text{ and } x \neq y \Rightarrow zRy]. \tag{2}$$

Somewhat to our surprise it turned out that the canonical frames of finite ideal algebras characterize the logic **S4.4** of Sobociński [18] which is an extension of the logic **S4** by the axiom

R1. $p \wedge \Diamond\Box p \to \Box p$.

In a temporal interpretation of this logic, $\Box p$ may be interpreted as "p is true now and will be true forever", and $\Diamond p$ as "p is true now or at some time in the future". Zeman [19] calls **S4.4** "the logic at the end of the world", and exclaims poetically

> One pictures an angel appearing, golden horn in hand, and announcing, "I am about to blow this horn, and when I do, the world will end; time will pass into eternity, and at that instant all eternal truths will be realized; all that ever is to be true «necessarily» will then become true necessarily." The angel lifts the horn to his lips, and the instant just before he blows it is the instant for which **S4.4** is expressive of the time sequence.

Theorem 6. [6, Theorem 4.5]
$\mathbb{E}q(\mathsf{IdA})$ *is the variety of algebraic models of the logic* ***S4.4****.*

To the best of our knowledge this is the first characterization of the algebraic models of **S4.4**.

In analogy to the diagram of subvarieties of $\mathbb{E}q(\mathsf{IdA})$ and $\mathbb{E}q(\mathsf{D})$ shown earlier, we consider the extensions of **S4.4** and their relation to extensions of **S5**; here we can use the description of extensions of **S5** obtained already by Scroggs [16]. For $i \in \{0, 1\}$ and $m \leqslant \omega$ let us denote by $\Lambda(i, m)$ the logic generated by the ideal algebra characterized by the pair $\langle i, m\rangle$ of Theorem 4. Then we obtain the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Lambda(0,1) & \supsetneq & \Lambda(0,2) & \supsetneq & \ldots & \supsetneq & \Lambda(0,m) & \ldots & \Lambda(0,\omega) = \mathsf{S5} \\
\cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| & & & & \cup\!\!\!| & \ldots & \cup\!\!\!| \\
\Lambda(1,1) & \supsetneq & \Lambda(1,2) & \supsetneq & \ldots & \supsetneq & \Lambda(1,m) & \ldots & \Lambda(1,\omega) = \mathsf{S4.4}
\end{array}$$

As in the algebraic case, the lower row does not list all extensions of **S4.4** below **S5**.

2.3 Free or projective algebras

Going beyond the investigations in [6] we shall now turn to free constructions in $\mathrm{Eq}(\mathsf{IdA})$. We shall just state the results, while the proofs will appear elsewhere.

The free algebra in $\mathrm{Eq}(\mathsf{IdA})$ with n free generators is denoted by $\mathfrak{F}(n)$. Unfortunately, we do not yet have a concrete description of $\mathfrak{F}(n)$. However since $\mathfrak{F}(n)$ is the free product of n copies of $\mathfrak{F}(1)$ by [17, Theorem 4.vii] it suffices to exhibit $\mathfrak{F}(1)$, provided that finite free products of finite algebras exist. We can achieve both of these aims, starting with the latter.

Theorem 7. [5]
The free product in $\mathrm{Eq}(\mathsf{IdA})$ *exists of any finite family of finite algebras.*

In the second step we shall describe $\mathfrak{F}(1)$. Suppose that B is the Boolean algebra with atoms r, s, t, u, v, w. The mapping $f : B \to B$ is defined on the atoms by

y	r	s	t	u	v	w
$f(y)$	$r+u$	$s+v$	t	$r+u$	v	$t+w$

and extended additively over B; furthermore, we set $f(0) := 0$. B is (isomorphic to) the product of three subdirectly irreducible ideal algebras, one of them being a discriminator algebra. These are shown in Figure 2 along with the canonical frame; the closed elements are shown in boxes.

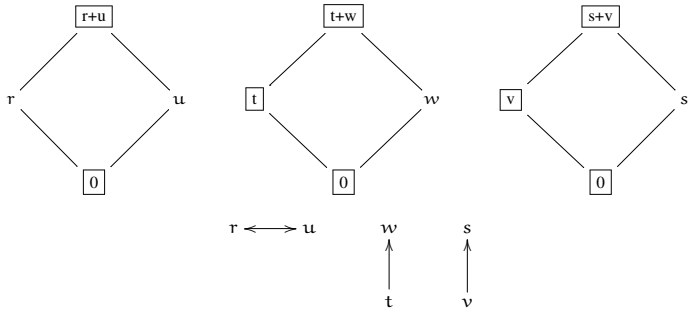


Figure 2. The decomposition of B and its canonical relation

Theorem 8. [5]
$\mathbb{B}$ *as defined above is an algebra in* $\mathbb{Eq}(\mathsf{IdA})$ *freely generated by* $r + s + t$.

The finite free monadic algebras were characterized by Bass [2], who showed that the monadic algebra with n free generators has $2^n \cdot 2^{(2^n-1)}$ atoms; the monadic algebra generated by one free generator is the product of two discriminator algebras each having two atoms.

Recall the definition of projective algebras: An algebra $\mathbb{A}$ is *projective* in a variety $\mathbb{V}$ if for all $\mathbb{B}, \mathbb{C} \in \mathbb{V}$, all surjective homomorphisms $f : \mathbb{B} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ and all homomorphisms $p : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ there is some homomorphism $q : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ such that $f \circ q = p$.

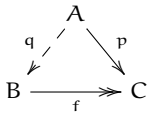


Figure 3. $f \circ q = p$

It is well known that in any variety of closure algebras the projective algebras are exactly the retracts of free ones. Every finite or every countably infinite Boolean algebra is projective with respect to the variety of Boolean algebras [12]. For monadic algebras this is not enough. Kagan and Quackenbush [13, Corollary 6.2] have shown that a finite monadic algebra $\mathbb{B}$ is projective in $\mathbb{Eq}(\mathsf{D})$ if and only if **2** is a quotient of $\mathbb{B}$. Therefore, the only projective discriminator algebra is **2**.

An analogous situation occurs in $\mathbb{Eq}(\mathsf{IdA})$:

Theorem 9. [5]
Let $\mathbb{B} \in \mathbb{Eq}(\mathsf{IdA})$ *be non-trivial and finite. Then,* $\mathbb{B}$ *is projective if and only if* **2** *is a quotient of* $\mathbb{B}$.

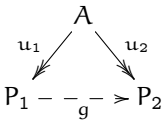
In contrast to D which contains only one algebra projective in $\mathbb{Eq}(\mathsf{D})$, there are infinitely many algebras in IdA, projective in $\mathbb{Eq}(\mathsf{IdA})$:

Corollary 1. [5]
Let $\mathbb{B} \in \mathsf{IdA}$ *be non-trivial and finite. Then,* $\mathbb{B}$ *is projective in* $\mathbb{Eq}(\mathsf{IdA})$ *if and only if* $\mathbb{B} = 2$ *or its determining ideal is generated by an antiatom.*

2.4 The unification type of $\mathrm{Eq}(\mathsf{IdA})$

Unification theory for equational theories and logics is an important topic, for example, for automatic deduction and rewriting systems. It has been a well researched concept for some time; we refer the reader to [1] for details. Unification theory in modal logic, in particular, projective unifiers for formulas in a logic Λ and in its generated variety, were introduced and investigated by Ghilardi [9, 10]. Ghilardi [9] introduced the concept of algebraic unification and showed that for any equational theory the symbolic and the algebraic unification types coincide via a suitable translation. He concludes that, broadly speaking, unification depends only on finitely presented and projective algebras. As this topic may not be familiar to many readers, we shall briefly outline its concepts, somewhat tailored to our situation. Suppose that V is a locally finite variety of closure algebras, and $\mathsf{B} \in \mathsf{V}$ is non-trivial and finite. A *unifier for* B is a pair $\langle \mathsf{A}, \mathfrak{p} \rangle$ where A is projective in V, and $\mathfrak{p}$ is a surjective homomorphism. B is called *unifiable* if it has a projective homomorphic image.

Given two unifiers $\mathfrak{u}_1$ and $\mathfrak{u}_2$ for A, $\mathfrak{u}_1 : \mathsf{A} \to \mathsf{P}_1$ is called *more general* than $\mathfrak{u}_2 : \mathsf{A} \to \mathsf{P}_2$ ($\mathfrak{u}_1 \preccurlyeq \mathfrak{u}_2$) if there is a homomorphism $\mathfrak{g}$ such that the following diagram commutes:



This quasiorder $\preccurlyeq$ of unifiers gives rise to four unification types, from the "best" to the "worst": 1, ω, ∞, 0. In particular, unification in Λ is said to be of type 1 (or *unitary*) if for every unifiable formula there is a most general unifier (mgu). A variety V is said to have *unitary unification*, if for every unifiable algebra there is a most general (in the sense of $\preccurlyeq$) unifier.

For some varieties a stronger condition holds: Every unifiable algebra is projective, in other words, if B has a projective quotient, then it is itself projective. This is true for monadic algebras and also for $\mathrm{Eq}(\mathsf{IdA})$, hence:

Theorem 10. [6, Theorem 7.2]
The unification type of $\mathrm{Eq}(\mathsf{IdA})$ *is unitary.*

In a much more general result, Dzik and Wojtylak [8] have shown that every extension of the logic **S4.3** has projective (and, hence, unitary)

unification; algebraically, that every subvariety of $\mathrm{Eq}(\mathsf{S4.3})$ possesses this property. As both $\mathrm{Eq}(\mathsf{D})$ and $\mathrm{Eq}(\mathsf{IdA})$ are subvarieties of $\mathrm{Eq}(\mathsf{S4.3})$, their result covers both of these classes.

References

1. F. Baader and W. Snyder. Unification theory. In A. Robinson and A. Voronkov, editors, *Handbook of Automated Reasoning I*, volume 1, chapter 8, pages 445–532. North–Holland, Amsterdam, 2001.
2. H. Bass. Finite monadic algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 9:258–268, 1958.
3. P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal logic*, volume 53 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 2001.
4. S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra – The Millenium Edition, 2012 Update*. Springer Verlag, New York, 2012.
5. I. Düntsch and W. Dzik. On free or projective ideal related algebras. In preparation.
6. I. Düntsch and W. Dzik. Ideal related algebras and their logics. *Journal of Logic and Computation*, April 2021.
7. W. Dzik. *Unification Types in Logic*. Silesian University Press (Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego), Katowice, 2007.
8. W. Dzik and P. Wojtylak. Projective unification in modal logic. *Logic Journal of the IGPL*, 20(1):121–153, 2012.
9. S. Ghilardi. Unification through projectivity. *Journal of Logic and Computation*, 7(6):733–752, 1997.
10. S. Ghilardi. Best solving modal equations. *Annals of Pure and Applied Logic*, 102(3):183–198, 2000.
11. P.R. Halmos. Algebraic logic. I. Monadic Boolean algebras. *Compositio Mathematica*, 12:217–249, 1956.
12. P.R. Halmos. *Lectures on Boolean algebras*. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 1. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1963.
13. J. Kagan and R. Quackenbush. Monadic algebras. *Reports on Mathematical Logic*, 7:53–61, 1976.
14. S. Koppelberg. *General Theory of Boolean Algebras*, volume 1 of *Handbook of Boolean algebras*. North-Holland Publishing Co, Amsterdam, 1989. Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet.
15. J.D. Monk. On equational classes of algebraic versions of logic. I. *Mathematica Scandinavica*, 27:53–71, 1970.
16. S.J. Scroggs. Extensions of the Lewis system S5. *Journal of Symbolic Logic*, 16:112–120, 1951.
17. R. Sikorski. Products of abstract algebras. *Fundamenta Mathematicae*, 39:211–228 (1953), 1952.
18. B. Sobociński. Modal system S4.4. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 5:305–312, 1964.
19. J.J. Zeman. A study of some systems in the neighborhood of S4.4. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 12:341–357, 1971.

Unifikacja w symetrycznych logikach modalnych

Zofia Kostrzycka, Piotr Wojtylak

Streszczenie Badamy logiki modalne wyznaczone przez symetryczne i n-przechodnie struktury Kripkego i dowodzimy, że mają one własność projektywnej unifikowalności.

Wstęp

Pojęcie unifikacji zostało wprowadzone do logiki zdań przez Silvia Ghilardiego, zob. [11, 12, 13]. Unifikatorem formuły A, w logice L, nazywamy podstawienie ε takie, że $\varepsilon(A) \in L$. Istnieją cztery typy unifikacji, zob. [1]. Logika może być unitarna (ma typ unifikacji 1), skończona (ma typ ω), nieskończona (ma typ ∞) lub zerowa (typu 0), w zależności od tego jak wiele maksymalnych unifikatorów posiada dowolna unifikowalna formuła. Typy unifikacji dla wielu przechodnich logik modalnych są znane. Ghilardi [12] udowodnił, że $K4$, $S4$, Grz, GL mają typ unifikacji ω. Nie jest znana logika modalna (czy też intuicjonistyczna) o nieskończonym typie unifikacji.

Pojęcie projektywnej unifikacji zdefiniował Ghilardi w [10]. Unifikator ε formuły A nazywamy projektywnym (w logice L), gdy $A \vdash_L x \leftrightarrow \varepsilon(x)$

Zofia Kostrzycka e-mail: z.kostrzycka@po.edu.pl
Katedra Matematyki i Zastosowań Matematyki, Politechnika Opolska

Piotr Wojtylak e-mail: pwojtylak@uni.opole.pl
Instytut Informatyki, Uniwersytet Opolski

dla każdej zmiennej x. Mówimy, że logika L ma własność projektywnej unifikacji, gdy każda unifikowalna (w logice L) formuła ma projektywny unifikator w L. Logiki z projektywną unifikacją są unitarne, gdyż projektywne unifikatory są najogólniejszymi unifikatorami (mgu). Ponadto każde rozszerzenie logiki z projektywną unifikacją ma także projektywną unifikację. Monotoniczność taka nie ma miejsca dla żadnego typu unifikacji. Wiadomo, że przechodnia logika modalna ma projektywną unifikację wtedy i tylko, gdy jest rozszerzeniem $K4.3T^{\Box}$, zob. [8, 16].

Typy unifikacji dla modalnych logik nieprzechodnich są mniej znane. Jeřábek [15] udowodnił, że podstawowa logika modalna K ma typ 0. Wiadomo też, że logiki KTB , KDB, KD i KB nie mają unitarnej unifikacji, zob. [20, 21, 6, 15].

Ponieważ naszym celem jest badanie unifikacji w symetrycznych logikach modalnych, odniesiemy się do trzech wcześniejszych prac dotyczących tego problemu napisanych przez: W. Dzika [7], S. Burrisa [4] i T. Kowalskiego oraz M. Krachta [17].

Dzik [5, 7], stosując metodę unifikatorów podstawowych, wykazał projektywność unifikacji w $S5$ (zauważmy, że $S5$ jest symetrycznym rozszerzeniem $K4.3T^{\Box}$). Rozszerzając tę metodę na logiki słabo przechodnie (w pracy [7]) udowodnił on, że $KDB4^{n+}$ i $KT4^nB$, dla dowolnych $n \geqslant 1$, mają projektywną unifikację. Zauważmy, że logiki te mają tylko dwie stałe logiczne: $\top$ i $\bot$. Dzik [7] wykazał, że dowolna unifikowalna formuła A ma następujący projektywny unifikator:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \Box^{n+}A \to x & \text{jeśli} \quad \nu(x) = \top \\ \Box^{n+}A \wedge x & \text{jeśli} \quad \nu(x) = \bot \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\nu : Var \to \{\top, \bot\}$ jest podstawowym unifikatorem dla A.

Burris [4] udowodnił, że rozmaitości dyskryminatorowe mają unitarną unifikację. Wśród wielu przykładów takich rozmaitości rozważał on tzw. algebry monadyczne. Można wykazać, że w szczególnym przypadku algebry te odpowiadają algebrom modalnym dla logik z $NEXT(KDB4^{n+})$. Burris zajmował się tzw. równościową unifikacją. W danej rozmaitości V (która jest teorią równościową) unifikatorem dwóch termów t_1 i t_2 jest podstawienie σ, takie że równość $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ zachodzi w V. Kowalski i Kracht [17] wykazali, że słabo przechodnie i cykliczne wielo-modalne algebry są dyskryminatorowe.

W niniejszej pracy rozważamy n-przechodnie i symetryczne logiki modalne, czyli badamy rozszerzenia logiki $\mathrm{KB4}^{n+}$, dla dowolnego $n \geqslant 1$. Wiadomo, że logika $\mathrm{KB4}^{n+}$ jest pełna względem klasy n-przechodnich i symetrycznych struktur Kripkego, zob. Jansana [14]. Wykażemy, że $\mathrm{KB4}^{n+}$, dla dowolnego $n \geqslant 1$, ma projektywną unifikację.

Formuła D nie jest twierdzeniem logiki $\mathrm{KB4}^{n+}$, ale $D^{\Box}$ jest; w konsekwencji mamy w logice cztery (nierównoważne) stałe logiczne: $\top$, $\bot$, $\Box\bot$ oraz $\Diamond\top$ i metoda unifikatorów podstawowych wymaga pewnej modyfikacji.

Pojęcia wstępne

Rozważamy język modalny $\{\rightarrow, \bot, \Box\}$; pozostałe funktory (klasyczne i modalne) $\wedge, \vee, \neg, \leftrightarrow, \Diamond, \Box^n, \Diamond^n$ są definiowane (za pomocą zwyczajowych definicji). Definiujemy

$$\Box^{+}x := x \wedge \Box x \quad \text{oraz} \quad \Box^{n+}x := x \wedge \Box x \wedge \ldots \wedge \Box^{n}x,$$

analogicznie rozumiemy $\Diamond^{n+}x$. Symbolem $\mathit{Var} := \{x_1, x_2, \ldots\}$ oznaczymy zbiór zmiennych zdaniowych; formuły zdaniowe są oznaczone jako $A, B, C, \ldots$, $\mathit{Var}(A)$ jest zbiorem zmiennych użytych w formule A. Zbiór wszystkich formuł modalnych oznaczamy symbolem Fm.

Podstawienia $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ są odwzorowaniami $: \mathit{Var} \to \mathrm{Fm}$. Rozszerzenie podstawienia $\alpha\colon \mathit{Var} \to \mathrm{Fm}$ do endomorfizmu algebry języka Fm, czyli odwzorowanie $: \mathrm{Fm} \to \mathrm{Fm}$, także będzie oznaczane symbolem α. Zatem $\alpha(A)$ oznacza wartość tego endomorfizmu na formule A, czyli będzie to podstawienie do formuły A, gdzie każdą zmienną x zastępujemy formułą $\alpha(x)$. Złożenie podstawień $\alpha \circ \tau$ jest podstawieniem, takim że $\alpha \circ \tau(A) = \alpha(\tau(A))$, dla każdego A.

Logiką modalną nazywamy dowolny podzbiór zbioru Fm zawierający wszystkie klasyczne tautologie, aksjomat $K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, domknięty na podstawienia i domknięty na reguły wnioskowania

$$\mathrm{MP} : \frac{A \to B, A}{B} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{RG} : \frac{A}{\Box A}.$$

Piszemy $\varphi =_{\mathrm{L}} \psi$, gdy $\varphi \to \psi$ i $\psi \to \varphi$ są tezami logiki L, natomiast $\varphi \leqslant_{\mathrm{L}} \psi$, gdy $\varphi \to \psi \in \mathrm{L}$.

Poniżej wypiszemy formuły modalne będące aksjomatami logik modalnych, do których będziemy się odwoływać w dalszych rozważaniach.

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{B} := \Diamond\Box x \to x & \\
\mathrm{T} := \Box x \to x & \mathrm{D} := \Box x \to \Diamond x = \Diamond\top \\
\mathrm{T}^{\Box} : \Box(\Box x \to x) & \mathrm{D}^{\Box} := \Box\Diamond\top \\
4 := \Box x \to \Box\Box x & 4^{+} := (x \wedge \Box x) \to \Box\Box x \\
4^{n} := \Box^{n} x \to \Box^{n+1} x & 4^{n+} := \Box^{n+} x \to \Box^{n+1} x \\
.1 : \Box\Diamond x \to \Diamond\Box x & .2 : \Diamond\Box x \to \Box\Diamond x \\
\mathrm{Tr} : \Box x \leftrightarrow x & \mathrm{Ver} : \Box x
\end{array}
$$

Aksjomat B jest znany jako aksjomat Brouwera i pociąga warunek symetrii w strukturach Kripkego: $\forall_{x,y}$ (jeśli xRy, to yRx). Aksjomat T jest znany jako aksjomat zwrotności, gdyż odpowiednie struktury Kripkego są zwrotne: $\forall_x\ xRx$; aksjomat D jest znany jako serialność, gdyż w odpowiednich strukturach Kripkego każdy punkt musi być w relacji co najmniej z jednym punktem. Formuły 4^n i 4^{n+}, $n \geqslant 1$ są aksjomatami n-przechodniości. Dla $n = 1$ upraszczają się one do aksjomatu przechodniości 4 i 4^{+}. W logice modalnej, która jest zwrotna, formuły 4 i 4^{+} są równoważne; tak samo 4^n i 4^{n+}. Ponieważ będziemy rozważać logiki bez aksjomatu T, w dalszym ciągu będziemy wykorzystywać formułę 4^{n+}.

Dla $n \geqslant 2$, formuła 4^{n+} ma prosty odpowiednik semantyczny. Niech $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ będzie strukturą Kripkego i $x, y, z \in W$. Relacja dostępności R zostanie uogólniona na relację dostępności w n-krokach (symb. R^n):

$$
\begin{array}{rcl}
xR^{0}y & \text{wtw} & x = y\,, \\
xR^{n+1}y & \text{wtw} & \exists_z\,(xR^{n}z \ \wedge\ zRy)\,.
\end{array}
$$

Relacja R w strukturze Kripkego $\mathfrak{F}$ jest określona jako n-przechodnia, jeśli możliwe jest skrócenie istniejącej ścieżki o długości $n+1$ do ścieżki o długości n (lub krótszej), zachowując punkty końcowe. Formalnie warunek ten jest definiowany jak następuje:

(tran_n) $\quad \forall_{x,y}$ (jeśli $xR^{n+1}y$, to

$$xR^{n}y \ \text{ lub } \ xR^{n-1}y \ \text{ lub } \ldots \text{ lub } \ xR^{0}y)\,.$$

Logiki słabo przechodnie

Przez słabo przechodnie struktury Kripkego rozumiemy n-przechodnie struktury (Kripkego) dla dowolnego $n \geqslant 1$.

Definicja 1. L *jest słabo przechodnia, gdy* $K4^{n+} \subseteq L$*, dla pewnego* $n \geqslant 1$.

W pracy będziemy rozważać logiki $KB4^{n+}$, $n \geqslant 2$. Logiki te są pełne względem klasy symetrycznych i n-przechodnich struktur Kripkego. Zauważmy, że 1-przechodniość razem z symetrią i aksjomatem D pociąga zwrotność relacji R.

Lemat 1. *Niech* $A \notin KB4^{n+}$, $n \geqslant 2$*. Wtedy istnieje niezwrotny,* n*-przechodni i symetryczny model Kripkego* $M = \langle \mathfrak{F}, v \rangle$ *z korzeniem* x*, taki że* $M, x \not\models A$.

Dodajmy, że w symetrycznej strukturze Kripkego każdy punkt jest korzeniem tej struktury. Wśród modeli dla logik $KB4^{n+}$ jest również model złożony z jednego punktu niezwrotnego.

Dla dowolnej logiki modalnej L mamy następujące twierdzenie o dedukcji:

$$DT: \quad \text{Jeśli } A \vdash_L B \quad \text{to} \quad \exists_{n \geqslant 0} \ \vdash_L \Box^{n+}A \to B;$$

natomiast dla n-przechodnich logik L twierdzenie o dedukcji przyjmuje postać:

$$DT^n: \quad \text{Jeśli } A \vdash_L B \quad \text{to} \quad \vdash_L \Box^{n+}A \to B.$$

W pracy [3] udowodniono, że:

Twierdzenie 1. *Logika modalna* L *spełnia* DT^n*, dla pewnego* $n \geqslant 1$*, wtw* L *jest słabo przechodnia.*

W naszych rozważaniach dotyczących modalności $\Box^{n+}$ skorzystamy z następujących obserwacji:

Lemat 2. *Dla dowolnych* $i, n \geqslant 0$ *zachodzi*

(i) $\Box^i\Box^{n+}x =_L \Box^{n+}\Box^i x$;
(ii) $\Box^{i+}\Box^{n+}x =_L \Box^{(i+n)+}x$.

Dowód. (i) Dowód indukcyjny względem i. Niech $i = 1$.

$$\Box\Box^{n+}x = \Box(x \wedge \Box x \wedge \ldots \wedge \Box^{n}x) =_{L} \Box x \wedge \Box^{2}x \wedge \ldots \wedge \Box^{(n+1)}x = \Box^{n+}\Box x.$$

Krok indukcyjny.

$$\Box^{i+1}\Box^{n+}x =$$
$$= \Box(\Box^{i}\Box^{n+}x) =_{L} \Box(\Box^{n+}\Box^{i}x) =_{L} \Box^{n+}\Box\Box^{i}x = \Box^{n+}\Box^{i+1}x.$$

(ii) $\Box^{i+}\Box^{n+}x = \Box^{n+}x \wedge \Box\Box^{n+}x \wedge \ldots \wedge \Box^{i}\Box^{n+}x =_{L}$
$$=_{L} \Box^{n+}x \wedge \Box^{n+1}x \wedge \ldots \wedge \Box^{n+i}x = \Box^{(n+i)+}x. \quad \square$$

Indeks L pomijamy i piszemy „$\varphi = \psi$”, gdy nie prowadzi to do nieporozumień. Podobnie „$\phi \leqslant \psi$” zamiast „$\phi \leqslant_{L} \psi$”.

Lemat 3. *Jeśli* L *jest* n*-przechodnia, to dla dowolnego* $i \geqslant 0$,

(i) L *jest* $(n + i)$*-przechodnie,*
(ii) $\Box^{i}\Box^{n+}x \geqslant \Box^{n+}x$;
(iii) $\Box^{(i+n)+}x = \Box^{n+}x$.

Dowód. (i) Z Lematu 2,

$$\Box^{(n+i)+}x = \Box^{n+}\Box^{i+}x \leqslant \Box^{n+1}\Box^{i+}x \leqslant \Box^{(n+i)+1}x.$$

(ii) Przez indukcję na i. Dla $i = 0$ wzór jest oczywisty. Krok indukcyjny:

$$\Box^{i+1}\Box^{n+}x = \Box(\Box^{i}\Box^{n+}x) \geqslant \Box(\Box^{n+}x) \geqslant \Box^{n+}x.$$

(iii) $\Box^{(i+n)+}x = \Box^{i+}\Box^{n+}x = \Box^{n+}x \wedge \Box\Box^{n+}x \wedge \ldots \wedge \Box^{i}\Box^{n+}x = \Box^{n+}x$. $\square$

Z twierdzenia o pełności dla logik $K4^{n+}$ (wiadomo, że n-przechodnia struktura Kripkego jest również $n + 1$-przechodnia) otrzymamy:

$$K \subset \ldots \subset K4^{(n+1)+} \subset K4^{n+} \subset \ldots \subset K4 \subset S5. \qquad (2)$$

Lemat 4. $KD^{\Box} \subset KB$. *To oznacza, że każda symetryczna logika jest rozszerzeniem logiki* $KD^{\Box}$.

Dowód. Zauważmy, że w logice KB zachodzi: $\top \leqslant \Box\Diamond\top$. Stąd $D^{\Box} \in KB$. $\square$

Twierdzenie 2. *Jeśli* L *jest* $\mathfrak{n}$*-przechodnia i symetryczna, to*

$$\begin{aligned} &\textit{(i)} \quad x \leqslant \Box\Diamond^{k+}x \ \textit{ dla każdego } \ k \geqslant 1,\\ &\textit{(ii)} \quad \Diamond^{n+}x \leqslant \Box\Diamond^{n+}x\,. \end{aligned}$$

Dowód. (i) Niech $k \geqslant 1$ będzie dowolne. Ponieważ $\Diamond x \leqslant \Diamond^{k+}x$, to $\Box\Diamond x \leqslant \Box\Diamond^{k+}x$. Z aksjomatu B mamy: $x \leqslant \Box\Diamond^{k+}x$.

(ii) Z *(i)* mamy $\Diamond^{n+}x \leqslant \Box\Diamond^{k+}\Diamond^{n+}x$. Z Lematu 3, $\Box\Diamond^{k+}\Diamond^{n+}x = \Box\Diamond^{(n+k)+}x = \Box\Diamond^{n+}x$. □

Z Lematu 4 i inkluzji (2) otrzymamy:

$$\mathrm{KD}^{\Box} \subset \ldots \subset \mathrm{KB4}^{(n+1)+} \subset \mathrm{KB4}^{n+} \subset \ldots \subset \mathrm{KB4}. \tag{3}$$

Lemat 5. *w logice* $\mathrm{KB4}^{n+}$*, dla dowolnego* $n \geqslant 1$*, zachodzi:*

$$\Box(\Box^{n+}A \to B) = \Box^{n+}A \to \Box B, \tag{4}$$

$$\Box(\Box^{n+}A \wedge B) = \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to \Box B), \tag{5}$$

$$\Box(\Box^{n+}A \wedge B) = \Box(\Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B)). \tag{6}$$

Dowód. (4) Oczywiście: $\Box(\Box^{n+}A \to B) \leqslant \Box\Box^{n+}A \to \Box B \leqslant$

$$\leqslant \Box^{(n+1)+}A \to \Box B = \Box^{n+1}A \wedge \Box^{n+}A \to \Box B = \Box^{n+}A \to \Box B.$$

Żeby wykazać implikację odwrotną, zauważmy, że $\Box B \leqslant \Box(\Box^{n+}A \to B)$. Z Twierdzenia 2 *(ii)*, otrzymamy

$$\Diamond^{n+}\neg A \leqslant \Box\Diamond^{n+}\neg A \leqslant \Box(\Box^{n+}A \to B).$$

Dalej $\Box^{n+}A \to \Box B = \Diamond^{n+}\neg A \vee \Box B \leqslant \Box(\Box^{n+}A \to B)$.

(5) $\Box(\Box^{n+}A \wedge B) =$

$$= \Box(\Box^{n+}A \wedge (\Box^{n+}A \to B)) = \Box\Box^{n+}A \wedge \Box(\Box^{n+}A \to B) = \Box\Box^{n+}A \wedge (\Box^{n+}A \to \Box B) = \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to \Box B)).$$

(6) Oczywiście mamy: $\Box^{n+}A \wedge B \leqslant \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B)$ i dalej

$$\Box(\Box^{n+}A \wedge B) \leqslant \Box(\Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B)).$$

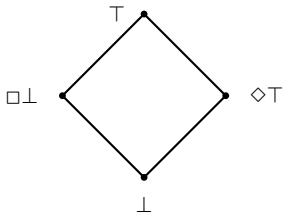
Żeby wykazać implikację odwrotną, zauważmy, że

$$\top = \Box^{n+}\Box A \to \Box A = \Box(\Box^{n+}\Box A \to A) = \Box(\Box\Box^{n+}A \to \Box^{n+}A),$$

i stąd $\top = \Box[\Box^{n+}\Box A \wedge (A \to B) \to \Box^{n+}A \wedge (A \to B)]$, co daje $\Box(\Box^{n+}\Box A \wedge (A \to B)) \leqslant \Box(\Box^{n+}A \wedge (A \to B) = \Box(\Box^{n+}A \wedge B)$. $\Box$

Unifikacja w $\mathrm{KB4}^{n+}$

Logika $\mathrm{KB4}^{n+}$ jest wyznaczona przez n-przechodnie, symetryczne i niezwrotne struktury Kripkego. Wśród tych modeli jest model złożony z jednego punktu niezwrotnego $\bullet$; jak również z jednego punktu zwrotnego $\circ$. Ponieważ $D^{\Box} \in \mathrm{KB4}^{n+}$ i $D \notin \mathrm{KB4}^{n+}$, w rozważanej logice występują cztery stałe logiczne: $\top, \Diamond\top, \bot, \Box\bot$. Stałe te tworzą algebrę modalną przedstawioną na Rysunku 1 (podalgebrę algebry Lindenbauma-Tarskiego).



Rysunek 1. W powyższej 4-elementowej algebrze mamy $\Box\Box\bot = \Box\bot$ i $\Box\Diamond\top = \top$. Można zauważyć, że jest ona algebrą produktową $A_1 \times A_2$, gdzie A_1 to algebra modalna wyznaczona przez strukturę $\bullet$, a A_2 to algebra wyznaczona przez $\circ$.

Niech A będzie formułą unifikowalną w $\mathrm{KB4}^{n+}$ i niech $\nu\colon Var \to \{\top, \bot, \Box\bot, \Diamond\top\}$ będzie jej unifikatorem podstawowym. Definiujemy podstawienie $\sigma\colon Var \to Fm$ następująco:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \Box^{n+}A \to x & \text{jeśli} \quad \nu(x) = \top \\ \Box\Box^{n+}A \to A \wedge x & \text{jeśli} \quad \nu(x) = \Diamond\top \\ \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to x) & \text{jeśli} \quad \nu(x) = \Box\bot \\ \Box^{n+}A \wedge x & \text{jeśli} \quad \nu(x) = \bot \end{cases}$$

Udowodnimy

Lemat 6. *Dla każdej formuły* B*, zachodzi (w* $\mathrm{KB4}^{n+}$*)*

$$\sigma(B) = \begin{cases} \Box^{n+}A \to B & \textit{jeśli} \quad \nu(B) = \top \\ \Box\Box^{n+}A \to A \wedge B & \textit{jeśli} \quad \nu(B) = \Diamond\top \\ \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B) & \textit{jeśli} \quad \nu(B) = \Box\bot \\ \Box^{n+}A \wedge B & \textit{jeśli} \quad \nu(B) = \bot \end{cases}$$

Dowód. Przez indukcję względem złożoności B. Jeśli B jest zmienną (lub dowolną stałą), powyższe zachodzi z definicji σ. Załóżmy, że powyższe zachodzi dla formuł B, B' i udowodnijmy, że zachodzi dla $\Box B$, $\neg B$, $B \wedge B'$. Najbardziej istotny jest dowód dla $\Box B$.

i) Przypuśćmy, że $\nu(B) = \top$. Stąd $\nu(\Box B) = \Box(\nu(B)) = \Box\top = \top$ i przez (4), $\sigma(\Box B) = \Box(\sigma(B)) = \Box(\Box^{n+}A \to B) = \Box^{n+}A \to \Box B$.

ii) Przypuśćmy, że $\nu(B) = \Diamond\top$. Wtedy $\nu(\Box B) = \Box\Diamond\top = \top$ i przez (4),

$$\begin{aligned} \sigma(\Box B) = \Box(\sigma(B)) = \Box(\Box\Box^{n+}A \to A \wedge B) = \Box(\Box^{n+}\Box A \to A \wedge B) = \\ = \Box^{n+}\Box A \to \Box A \wedge \Box B = \Box^{n+}\Box A \to \Box B \leqslant \Box^{n+}A \to \Box B \\ \text{i} \qquad \Box^{n+}A \to \Box B = \Box(\Box^{n+}A \to B) \leqslant \\ \leqslant \Box\Box^{n+}A \to \Box B = \Box^{n+}\Box A \to \Box B. \end{aligned}$$

iii) Przypuśćmy, że $\nu(B) = \bot$. Mamy $\nu(\Box B) = \Box\bot$ i przez (5),

$$\sigma(\Box B) = \Box(\sigma(B)) = \Box(\Box^{n+}A \wedge B) = \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to \Box B).$$

iv) Przypuśćmy, że $\nu(B) = \Box\bot$. Stąd $\nu(\Box B) = \Box\Box\bot = \Box\bot$ i przez (6) oraz (5),

$$\sigma(\Box B) = \Box(\sigma(B)) = \Box(\Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B)) = \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to \Box B).$$

Relatywnie prosty jest dowód powyższego lematu dla $\neg B$ (zakładając, że zachodzi dla B), gdyż:

$$\begin{aligned} \neg(\Box^{n+}A \to B) = \Box^{n+}A \wedge \neg B \quad \text{i} \quad \neg\top = \bot. \\ \neg(\Box^{n+}A \wedge B) = \Box^{n+}A \to \neg B \quad \text{i} \quad \neg\bot = \top. \\ \neg(\Box\Box^{n+}A \to A \wedge B) = \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to \neg B) \quad \text{i} \quad \neg\Diamond\top = \Box\bot. \\ \neg(\Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B)) = \Box\Box^{n+}A \to A \wedge \neg B \quad \text{i} \quad \neg\Box\bot = \Diamond\top. \end{aligned}$$

Bardziej pracochłonne jest sprawdzenie formuły $B \wedge B'$, gdyż musimy rozważyć 16 przypadków. Jednakże przypadek gdy $\nu(B) = \nu(B')$ jest bardzo prosty. Ponieważ $B \wedge B' = B' \wedge B$, więc również możemy opuścić 6 innych przypadków. Niech $\nu(B) = \bot$. Wtedy $\sigma(B \wedge B') =$

$$= (\Box^{n+}A \wedge B) \wedge (\Box^{n+}A \to B') = \Box^{n+}A \wedge B \wedge B'$$

lub $= (\Box^{n+}A \wedge B) \wedge (\Box\Box^{n+}A \to A \wedge B') = \Box^{n+}A \wedge B \wedge B'$

lub $= (\Box^{n+}A \wedge B) \wedge (\Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B')) = \Box^{n+}A \wedge B \wedge B'$.

Podobnie, gdy $\nu(B) = \top$. Wtedy $\sigma(B \wedge B') =$

$$= (\Box^{n+}A \to B) \wedge (\Box^{n+}A \wedge B') = \Box^{n+}A \wedge B \wedge B'$$

lub

$$= (\Box^{n+}A \to B) \wedge (\Box\Box^{n+}A \to A \wedge B') = \Box\Box^{n+}A \to A \wedge B \wedge B'$$

lub

$$= (\Box^{n+}A \to B) \wedge \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B') = \Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B \wedge B').$$

Tak więc został przypadek $\nu(B) = \Box\bot$ i $\nu(B') = \Diamond\top$. Wtedy mamy $\sigma(B \wedge B') = (\Box\Box^{n+}A \wedge (A \to B)) \wedge (\Box\Box^{n+}A \to A \wedge B') = \Box^{n+}A \wedge B \wedge B'$. □

Twierdzenie 3. *Logika* $\mathtt{KB4}^{n+}$ *jest projektywna, dla dowolnego* $n \geqslant 1$*; to oznacza, że każda unifikowalna formuła* A *w logice* $\mathtt{KB4}^{n+}$ *ma projektywny unifikator.*

Dowód. Niech A będzie $\mathtt{KB4}^{n+}$-unifikowalna i niech ν będzie jej unifikatorem podstawowym. Wtedy $\nu(A) = \top$ i z Lematu 6 otrzymamy $\sigma(A) = \Box^{n+}A \to A = \top$. Tak więc σ jest unifikatorem dla A. Co więcej, σ jest projektywne, gdyż łatwo zauważyć, że $A \vdash \sigma(x) \leftrightarrow x$, dla każdej zmiennej x. □

Wniosek 1. *Każda symetryczna i słabo -przechodnia logika modalna* L *ma unitarną unifikację.*

Wiadomo, że logiki KTB , KDB, KD oraz KB nie mają unitarnej unifikacji, zob. [20, 21, 6, 15], i nie są one słabo-przechodnie. Istnieje hipoteza, że symetryczna logika modalna ma unitarną unifikację wtw, gdy jest ona słabo-przechodnia. Hipoteza nie została jednak dotychczas zweryfikowana. Typy unifikacji dla logik KTB , KDB oraz KB również nie są znane.

Literatura

1. F. Baader and S. Ghilardi. Unification in modal and description logics. *Logic Journal of the IGLP*, *19*(6):705–730, 2011.
2. P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. *Modal logic*, volume 53 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
3. W. Blok and D. Pigozzi. On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I. *Algebra Universalis*, 15:195–227, 1982.
4. S. Burris. Discriminator varieties and symbolic computation. *Journal of Symbolic Computation*, 13:175–207, 1992.
5. W. Dzik. Unitary unification of S5 logic and its extensions. *Bulletin of the Section of Logic*, 32(1–2):19–26, 2003.
6. W. Dzik. Transparent unifiers in modal logics with self-conjugate operators. *Bulletin of the Section of Logic*, 35(2–3):73–83, 2006.
7. W. Dzik. *Unification types in logic*. Silesian University Press (Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego), Katowice, 2007.
8. W. Dzik and P. Wojtylak. Projective unification in modal logic. *The Logic Journal of the IGPL*, 20(1):121–153, 2012.
9. W. Dzik and P. Wojtylak. Unification in first-oreder transitive modal logic. *The Logic Journal of the IGPL*, 25(5):693–717, 2019.
10. S. Ghilardi. Unification through projectivity. *Journal of Symbolic Computation*, 7:733–752, 1997.
11. S. Ghilardi. Unification in intuitionistic logic. *Journal of Symbolic Logic*, 64(2): 859–880, 1999.
12. S. Ghilardi. Best solving modal equations. *Annals of Pure and Applied Logic*, 102:183–198, 2000.
13. S. Ghilardi and L. Sacchetti. Filtering unification and most general unifiers in modal logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 69:879–906, 2004.
14. R. Jansana. Some logics related to von Wright's logic of place. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 35(1):88–98, 1994.
15. E. Jeřábek. Blending margins: The modal logic K has nullary unification type. *Journal of Logic and Computation*, 25(5):1231–1240, 2015.
16. S. Kost. Projective unification in transitive modal logics. *Logic Journal of the IGPL*, 26(5):548–566, 2018.
17. T. Kowalski and M. Kracht. Semisimple varieties of modal algebras. *Studia Logica*, 83:351–363, 2006.
18. M. Kracht. *Tools and techniques in modal logic*. Volume 142 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, Amsterdam, 1999.
19. V.V. Rybakov. *Admissibility of logical inference rules*. Volume 136 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, New York and Amsterdam, 1997.
20. T. Williamson. An alternative rule of disjunction in modal logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 33(1):89–100, 1992.
21. T. Williamson. Some admissible rules in nonnormal modal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 34(3):378–400, 1993.
22. M. Zakharyaschev, F. Wolter and A. Chagrov. Advanced modal logic. In D. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 3 (2nd edition). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

Logika Suszki a argument „jak z procy”

Mieczysław Omyła

Streszczenie Jednym z głównych zainteresowań naukowych Profesora Jerzego Pogonowskiego jest zastosowanie metod formalnych do badania języka naturalnego. Badania te, jak to sam określa, dotyczą „matematycznego modelowania języka naturalnego”. Problematyce tej poświęcił szereg znaczących tekstów, jak na przykład: *Formal methods in linguistics* (*Buffalo Papers in Linguistics*, Vol. 1, No. 3, 1979, pp. 31–83), „Lingwistyka a teoria modeli” (w: *Znaczenie i prawda*, red. J. Pelc, PWN 1994).
Za szczególnie ważną sprawę uważa „opracowanie matematycznych reprezentacji przedmiotowego odniesienia zdań”. Profesor Pogonowski upatruje w logice niefregowskiej Suszki oraz w mereologii Stanisława Leśniewskiego środki formalne, które mogą być stosowane w semantyce języka naturalnego. W niniejszej pracy omówione zostaną pewne trudności związane z zastosowaniem logiki Suszki do analizy języka naturalnego.

1 Logika Suszki

Według *Traktatu* Wittgensteina „świat jest wyspą faktów w oceanie możliwości”. Pojedynczemu faktowi w języku odpowiada zdanie prawdziwe, a realnym możliwościom odpowiadają opisujące je zdania niesprzeczne.

Mieczysław Omyła e-mail: m.omyla@uw.edu.pl
Wydział Prawa i Administracji, Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

Dla formalizacji pewnego fragmentu ontologii *Traktatu* Wittgensteina Suszko wprowadził do literatury logicznej tzw. W-języki (W – od Wittgenstein). Języki te charakteryzują się tym, że w ich alfabecie występują dwa rodzaje zmiennych, a mianowicie zmienne nazwowe: $x, y, z \ldots$, które przyjmują wartości w zbiorze przedmiotów i zmienne zdaniowe: $p, q, r, \ldots$, które przyjmują wartości w zbiorze sytuacji. Zmienne zdaniowe tym się różnią od innych rodzajów zmiennych, że są zarazem formułami zdaniowymi. W językach rodzaju W ponadto występują predykat i spójnik identyczności, które Suszko zwykle oznaczał tym samym symbolem „$\equiv$" dla zaznaczenia, iż wyrażają one tę samą ideę identyczności. Kontekst zawsze jednoznacznie przesądza, czy mamy do czynienia z predykatem, czy ze spójnikiem identyczności.

Poza tym w językach tych występują zwykłe stałe logiczne: $\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\rightarrow$ (implikacja), $\leftrightarrow$ (równoważność) oraz kwantyfikatory wiążące zarówno zmienne nazwowe, jak i zdaniowe: $\forall$ (kwantyfikator ogólny), $\exists$ (egzystencjalny), $\exists_1$ (kwantyfikator jednostkowy). W językach tych mogą występować stałe nazwowe (proste nazwy): $c, d, c_1, d_1, \ldots$ oraz stałe zdaniowe (proste zdania): $a, b, a_1, b_1, \ldots$.

W metateorii W-języków stosuje się następujące notacje: Liter: ν, w, $w_1, w_2, \ldots$ używa się do oznaczania zarówno zmiennych zdaniowych jak i nazwowych. Z kolei litery: α, β, γ oznaczają dowolne formuły zdaniowe, a litery φ, ψ, η, w zależności od kontekstu, oznaczają zarówno formuły zdaniowe jak i nazwowe.

Logika Suszki, czyli operacja konsekwencji Cn w językach rodzaju W, określona jest aksjomatycznie. Logika ta jest pewnym rachunkiem i jak każdy rachunek może być rozwijana bez filozoficznych interpretacji. Niemniej jednak, podstawą filozoficzną tej logiki jest założenie, że zdanie w sensie logicznym, precyzyjnie zinterpretowane, stwierdza pewien określony stan rzeczy. Stany rzeczy stwierdzane przez zdania nazywamy ich *korelatami semantycznymi* bądź *sytuacjami*.

Suszko nazwał swój rachunek logiczny *logiką niefregowską* dla podkreślenia, że logika ta nie nakłada żadnych ograniczeń ilościowych ani strukturalnych na uniwersum zmiennych zdaniowych, jak i nazwowych. Jedynymi założeniami egzystencjalnymi tej logiki jest, że uniwersum zmiennych nazwowych jest niepuste, a uniwersum zmiennych zdaniowych jest co najmniej dwuelementowe, tzn. zdanie prawdziwe ma inny korelat semantyczny niż zdanie fałszywe.

W językach rodzaju W możemy *explicite* formułować pewne założenia ontologiczne, które nakładają na uniwersum zmiennych zdaniowych określoną strukturę. Pewne wskazówki co do założeń ontologicznych możemy znaleźć w *Traktacie logiczno-filozoficznym*.

W *Traktacie* Wittgenstein napisał:

> 5.141 Jeżeli p wynika z q, a q wynika z p, to są jednym i tym samy zdaniem.

oraz

> 5.5303 Mówiąc nawiasem: powiedzieć o dwu rzeczach, że są identyczne, jest niedorzecznością; a powiedzieć o jednej, że jest identyczna sama z sobą, to nie powiedzieć nic.

Formalizacją tezy 5.141 w językach rodzaju W jest teoria:

$$\mathsf{WTQ} = \mathrm{Cn}(\{\alpha \equiv \beta : (\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathrm{C}(\varnothing)\})$$

Każdą teorię zawierającą zbiór WTQ nazywamy WTQ-teorią. Zbiór formuł WTQ jest najmniejszą WTQ-teorią.

Teoria WTQ stwierdza, zgodnie z tezą Wittgensteina 5.141, że zdania logicznie równoważne na gruncie logiki niefregowskiej przedstawiają tę samą sytuację.

W językach rodzaju W definiowalne są stałe zdaniowe: „0”, „1” za pomocą następujących definicji równościowych:

$$0 \equiv \underset{\mathrm{p}}{\forall}(\mathrm{p}) \qquad\qquad 1 \equiv \underset{\mathrm{p}}{\exists}(\mathrm{p})$$

Stała zdaniowa „0” stwierdza, że każda sytuacja jest faktem. Sytuacja ta jest sytuacją niemożliwą, a 1 jest sytuacją konieczną polegającą na tym, że istnieje przynajmniej jedna sytuacja, która jest faktem.

Za pomocą symboli: 0,1 określamy teorię:

$$\mathsf{WHQ} = \mathrm{Cn}(\mathsf{WTQ} \cup \{(\alpha \equiv \beta) \equiv 0 \vee (\alpha \equiv \beta) \equiv 1\});$$

która formalizuje obie tezy Wittgensteina: 5.141 i 5.5303.

Modele WHQ-teorii mają dwie ważne własności:

(i) Zdania logicznie równoważne posiadają ten sam korelat semantyczny.

(ii) Równości prawdziwe przedstawiają tę samą sytuację konieczną, a równości fałszywej odpowiada sytuacja niemożliwa 0.

Najsilniejszym założeniem ontologicznym, które można sformułować w sposób niesprzeczny w W-językach, jest założenie, że uniwersum zmiennych zdaniowych jest dwuelementowe. Założenie to Suszko nazwał ontologiczną wersją *aksjomatu Fregego* (AF).

Ontologiczną wersją aksjomatu Fregego jest każda z formuł:

$$\forall p \forall q \forall r((p \equiv q) \vee (p \equiv r) \vee (q \equiv r)) \tag{1}$$

$$\forall p \forall q((p \leftrightarrow q) \equiv (p \equiv q)) \tag{2}$$

Zdanie (1) stwierdza, że uniwersum zmiennych zdaniowych, czyli uniwersum tego, co jest dane za pomocą zdań, jest co najwyżej dwuelementowe, a zdanie (2) zrównuje spójnik równoważności „$\leftrightarrow$" ze spójnikiem identyczności „$\equiv$".

Aksjomat Fregego jest numerycznym założeniem dotyczącym uniwersum zmiennych zdaniowych. Aby aksjomat Fregego w danym języku dało się *explicite* sformułować, muszą w języku występować zmienne zdaniowe, kwantyfikatory wiążące te zmienne, spójnik identyczności oraz inne klasyczne spójniki.

Teoria T określona w W-języku jest *fregowska*, gdy jej twierdzeniem jest (AF). Z kolei teoria jest *quasi-fregowska*, gdy jest domknięta na regułę quasi-fregowską:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \vdash (\alpha \equiv \beta) \tag{QF}$$

Jeżeli w danej logice nie zachodzi twierdzenie o dedukcji, to teorie quasi-fregowskie mogą być istotnie słabsze od teorii fregowskich.

Oprócz ontologicznej wersji aksjomatu Fregego Suszko rozważał również semantyczną wersję aksjomatu Fregego, która stwierdza, że wszystkie zdania prawdziwe mają jeden wspólny korelat semantyczny i podobnie wszystkie zdania fałszywe również mają jeden i ten sam korelat semantyczny.

Semantyka W-języków

W literaturze dotyczącej logiki niefregowskiej na ogół badane były czysto zdaniowe logiki niefregowskie, które nie uwzględniają budowy zdań

prostych. Sztandarowy wynik uzyskany przez Suszkę dla tych logik głosi, że uniwersum adekwatnego modelu dla absolutnej niefregowskiej logiki zdaniowej zawiera continuum elementów.

Oprócz badania czysto zdaniowych języków S.L. Bloom i R. Suszko stworzyli również formalną semantykę dla W-języków. W semantyce tej nie przesądza się niczego na temat tego, czym jest przedmiot lub sytuacja. Przyjmuje się jedynie konwencję, że jeżeli coś zostało nazwane, to – w zamierzonym modelu języka – jest przedmiotem, a jeżeli coś zostało stwierdzone w zdaniu, to jest sytuacją. Nie wynika stąd, że w ustalonym języku każdy przedmiot z uniwersum dyskursu jest nazwany, ale każdy przedmiot, dla pewnego wartościowania zmiennych, może być wartością zmiennej nazwowej. Podobnie nie każda sytuacja, czy też stan rzeczy zachodzący między przedmiotami z uniwersum naszego dyskursu, jest opisana w zdaniu danego języka i nie każdy fakt może być stwierdzony w pewnym zdaniu prawdziwym. Natomiast jeżeli w rozważanym języku występują zmienne zdaniowe, to każda sytuacja z uniwersum naszego dyskursu może być wartością pewnej zmiennej zdaniowej. Pojęcie modelu dla W-języków zostało wprowadzone przez S.L. Blooma w pracy [2] i jest wspólnym dziełem R. Suszki i S.L. Blooma. Najprościej możemy powiedzieć, że model $\mathcal{M}$ dla języka, w którym obowiązuje logika niefregowska, jest uporządkowaną czwórką:

$$(\mathsf{U}_o, \mathsf{U}_s, \mathsf{D}, \mathsf{F}), \qquad (*)$$

gdzie:

- U_o jest to zbiór, w którym przyjmują wartości zmienne nazwowe; jest to uniwersum przedmiotów, o których się mówi w języku $\mathcal{J}$;
- U_s jest to zbiór, w którym przyjmują wartości zmienne zdaniowe; elementy ze zbioru U_s reprezentują sytuacje stwierdzane przez zdania języka $\mathcal{J}$;
- $\varnothing \neq \mathsf{D} \subset \mathsf{U}_s$ jest podzbiorem wyróżnionym w U_s, reprezentuje on zbiór faktów, czyli korelatów zdań prawdziwych;
- F jest zbiorem funkcji będących interpretacjami: spójników, predykatów, symboli funkcyjnych oraz kwantyfikatorów języka $\mathcal{J}$.

W szczególności w zbiorze F znajdują się funkcje: $-, \cup, \cap, \dot{-}, \div, \circ$ będące interpretacjami, odpowiednio, spójników logicznych: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \equiv$, oraz funkcje: $\bullet, \cap_o, \cup_o, \cap_s, \cap_s$ będące, odpowiednio, interpretacjami pre-

dykatu identyczności, kwantyfikatorów wiążących zmienne nazwowe oraz kwantyfikatorów wiążących zmienne zdaniowe.

Struktura $(*)$ jest modelem dla pewnego W-języka, gdy spełnione są następujące warunki:

I. Dla dowolnych $a, b \in U_s$

(i) $-a \in D$ gdy $a \notin D$,
(ii) $a \cap b \in D$ gdy $a, b \in D$,
(iii) $a \cup b \in D$ gdy $(a \in D$ lub $b \in D)$,
(iv) $a \dot{-} b \in D$ gdy $(a \notin D$ lub $b \in D)$,
(v) $a \div b \in D$ gdy $(a, b \in D$ lub $a, b \notin D)$,
(vi) $a \circ b \in D$ gdy $a = b$.

II. Dla dowolnych $c, d \in U_o$

(vii) $c \bullet d \in D$ gdy $c = d$.

III. Dla dowolnej funkcji $f \in U_o^{U_o}$ spełnione są warunki:

(viii) $\cap_o(f) \in D$ gdy dla każdego $c \in U_o$; $f(c) \in D$,
(ix) $\cup_o(f) \in D$ gdy istnieje $c \in U_o$; $f(c) \in D$.

IV. Dla dowolnej funkcji $g \in U_s^{U_s}$ spełnione są warunki:

(x) $\cap_s(g) \in D$ gdy dla każdego $a \in U_s$; $g(a) \in D$,
(xi) $\cup_s(g) \in D$ gdy istnieje $a \in U_s$; $g(a) \in D$.

Z określenia pojęcia modelu języka $\mathcal{J}$ wynika, że w dowolnym W-modelu zbiór przedmiotów U_o jest niepusty, a zbiór reprezentujący sytuacje U_s jest co najmniej dwuelementowy i przynajmniej jedna sytuacja jest faktem, czyli $D \neq \varnothing$. Ponadto zbiory reprezentujące sytuacje i przedmioty w modelu są rozłączne, czyli $U_o \cap U_s = \varnothing$. Symbolem $\mathsf{TR}(\mathcal{M})$ oznaczamy zbiór formuł prawdziwych w modelu $\mathcal{M}$. W szczególności, jeżeli w rozważanym W-języku $\mathcal{J}$ nie ma symboli pozalogicznych, to modelem dla języka $\mathcal{J}$ jest dowolna struktura

$$(U_o, U_s, D, -, \cap, \cup, \dot{-}, \div, \circ, \bullet, \cap_o, \cup_o, \cap_s, \cap_s) \qquad (**)$$

taka, że $U_o \cap U_s = \varnothing$, $\varnothing \neq D \subset U_s$, a ponadto spełnione są warunki (i)–(xi).

W pracy [2] udowodniono między innymi następujące twierdzenia o charakterze semantycznym:

– Dla każdego niesprzecznego zbioru zdań X dowolnego W-języka istnieje model $\mathcal{M}$ taki, że $X \subseteq \mathsf{TR}(\mathcal{M})$.
– Formuła α W-języka $\mathcal{J}$ jest twierdzeniem logicznym zawsze i tylko wtedy, gdy formuła α jest prawdziwa w każdym modelu języka $\mathcal{J}$.
– Jeżeli X jest zbiorem zdań W-języka $\mathcal{J}$ oraz zdanie α nie wynika logicznie ze zbioru zdań X, to istnieje model $\mathcal{M}$ języka $\mathcal{J}$ taki, że zbiór zdań $X \cup \{\neg\alpha\} \subseteq \mathsf{TR}(\mathcal{M})$.

2 O tak zwanym argumencie „z procy”

Wielu logików podziela poglądy Fregego i uważa, że zdaniu nie da się konsekwentnie przypisać korelatu semantycznego innego niż jego wartość logiczna. W swoich argumentacjach przytaczają oni tzw. argument „z procy”. Autorzy ci przyjmują dwa dość naturalne założenia, a mianowicie:

(Z1) Wyrażenia mające ten sam korelat semantyczny są wzajemnie zastępowalne w dowolnym kontekście językowym bez zmiany korelatu semantycznego tego kontekstu.

(Z2) Zdania logicznie równoważne mają ten sam korelat semantyczny.

Założenie (Z1) jest zwane Zasadą Fregego, a założenie (Z2) jest Zasadą Wittgensteina.

Zwolennicy argumentu „z procy” przyjmują dalej, że w alfabecie języka występuje operator abstrakcji bądź symbol deskrypcji nieokreślonej.

Operator abstrakcji dla dowolnej funkcji zdaniowej „$P(x)$” i dla dowolnego zbioru U tworzy nazwę zbioru przedmiotów ze zbioru U spełniających tę funkcję: czyli $\{x \in U : P(x)\}$. Z kolei operator deskrypcji nieokreślonej I dla danego zbioru U i dowolnej funkcji zdaniowej $P(x)$ tworzy nazwę jedynego takiego x ze zbioru U, który spełnia funkcję $P(x)$. W przypadku gdy takiego przedmiotu nie ma, to znak $I_x P(x)$ jest symbolem nieokreślonym.

W przypadku gdy w języku występuje symbol deskrypcji nieokreślonej, to zwolennicy argumentu z procy prowadzą następujące rozumowanie: Niech T będzie dowolną teorią zupełną w języku $\mathcal{J}$. Teorię T możemy traktować jako zbiór zdań prawdziwych w pewnym modelu m. Niech α, β

będą dowolnymi zdaniami o tej samej wartości logicznej, czyli takimi, że równoważność:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \tag{3}$$

jest twierdzeniem teorii T. Wtedy zdania:

$$\alpha \leftrightarrow (I_x(\alpha \wedge (x \equiv c)) \equiv c) \tag{4}$$

$$\beta \leftrightarrow (I_x(\beta \wedge (x \equiv c)) \equiv c) \tag{5}$$

są również twierdzeniami teorii T.

W przypadku gdy α, β są zdaniami prawdziwymi, to otrzymujemy, że zachodzą również

$$I_x(\alpha \wedge (x \equiv c)) \equiv c \tag{6}$$

$$I_x(\beta \wedge (x \equiv c)) \equiv c. \tag{7}$$

Zachodzi więc również równość:

$$I_x(\alpha \wedge (x \equiv c)) \equiv I_x(\beta \wedge (x \equiv c)) \tag{8}$$

Zwolennicy argumentu „z procy" stwierdzają, że równoważności (4) i (5) są twierdzeniami logicznymi, a zdania równoważne logicznie, zgodnie z założeniem (Z2), mają te same korelaty semantyczne, więc zachodzą również równości:

$$\alpha \equiv (I_x(\alpha \wedge (x \equiv c)) \equiv c) \tag{4'}$$

$$\beta \equiv (I_x(\beta \wedge (x \equiv c)) \equiv c) \tag{5'}$$

Na podstawie (4'), (5'), (8) otrzymujemy równość: $\alpha \equiv \beta$. Zatem zbiór zdań prawdziwych w dowolnym modelu jest teorią quasi-fregowską.

Dowód ten wydaje się o tyle nieprzekonujący, że w przypadku gdy zdania α, β są fałszywe, to symbole $I_x(\alpha \wedge (x \equiv c))$, $I_x(\beta \wedge (x \equiv c))$ są symbolami nieokreślonymi. Nie mają one sensu w sformalizowanej teorii. Aby twierdzić, że formuły (4), (5) są twierdzeniami logicznymi, nie powinno być istotne, czy zdania α, β są zdaniami prawdziwymi, czy fałszywymi.

W przypadku operatora abstrakcji mamy z kolei następującą sytuację.

Załóżmy, że równoważność $\alpha \leftrightarrow \beta$ jest twierdzeniem pewnej teorii zupełnej T. Wtedy twierdzeniami T są również:

$$\alpha \leftrightarrow (\{c\} \equiv \{x : \alpha \wedge (x \equiv c)\}) \tag{9}$$

$$\beta \leftrightarrow (\{c\} \equiv \{x : \beta \wedge (x \equiv c)\}) \tag{10}$$

Zwolennicy argumentu „z procy” wzmacniają równoważności (9) i (10), jako – ich zdaniem – równoważności logiczne, do równości:

$$\alpha \equiv (\{c\} \equiv \{x : \alpha \wedge (x \equiv c)\}) \tag{9'}$$

$$\beta \equiv (\{c\} \equiv \{x : \beta \wedge (x \equiv c)\}) \tag{10'}$$

Ze względu na to, że $\alpha \leftrightarrow \beta \in \mathsf{T}$, to z (9) i (10) otrzymujemy:

$$\{x : \alpha \wedge (x \equiv c)\} \equiv \{x : \beta \wedge (x \equiv c)\} \in \mathsf{T} \tag{11}$$

Z (9'), (11), (10') otrzymujemy, że

$$\alpha \equiv (\{c\} \equiv \{x : \beta \wedge (x \equiv c)\}) \in \mathsf{T} \tag{12}$$

A więc $\alpha \equiv \beta \in \mathsf{T}$.

Otrzymaliśmy wniosek, zgodnie z którym w języku z operatorem abstrakcji zbiór zdań prawdziwych jest również teorią quasi-fregowską. Wątpliwość tutaj budzi fakt, że równoważności (9), (10) nie są czysto logicznymi równoważnościami. Źródłem ich nie jest wyłącznie logika, tylko semantyka teoriomnogościowa oraz wzięta z matematyki zasada abstrakcji, zgodnie z którą dla dowolnego zbioru i dla dowolnej funkcji zdaniowej w nim określonej istnieje zbiór wyznaczony przez tę funkcję zdaniową.

Na uwagę zasługuje również fakt, że zarówno w przypadku deskrypcji nieokreślonej jak i operatora abstrakcji dla dowolnych zdań α, β korzystamy z pewnych równości; (4'), (5') oraz (9'), (10'), które nie są twierdzeniami logicznymi logiki niefregowskiej.

3 Deskrypcje w logice niefregowskiej

Aby do problemu argumentu „z procy” podejść od strony logiki niefregowskiej, rozszerzymy dowolny język rodzaju W o operator deskrypcji określonej.

Niech $\mathcal{J}$ będzie dowolnym W-językiem i niech S, N, Cn oznaczają, kolejno, zbiór formuł zdaniowych, nazwowych oraz operację konsekwencji rozważanego języka. Ze względu na to, że w języku $\mathcal{J}$ występują dwa rodzaje zmiennych: zmienne nazwowe i zmienne zdaniowe, to do języka

$\mathcal{J}$ możemy wprowadzić zarówno operator deskrypcji wiążący zmienną nazwową, jak i operator deskrypcji wiążący zmienną zdaniową. W logice niefregowskiej oba operatory deskrypcji wprowadza się za pomocą następujących schematów definicji:

$$\{y \equiv \iota_x(\alpha(x), c)\} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \{\forall_x(\alpha(x) \leftrightarrow (x \equiv y)) \vee \neg\exists_{1x}(\alpha(x) \wedge (y \equiv c))\} \quad (\delta_1)$$

(jest to schemat definicji operatora deskrypcji nazwotwórczego)

$$\{q \equiv \iota_p(\alpha(p), a)\} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \{\forall_p(\alpha(p) \leftrightarrow (p \equiv q)) \vee \neg\exists_{1p}(\alpha(p) \wedge (p \equiv a))\} \quad (\delta_2)$$

(jest to schemat definicji operatora deskrypcji zdaniotwórczego).

Suszko przyjmował jeden ogólny schemat, który reprezentuje definicje równoważnościowe obu operatorów deskrypcji, a mianowicie:

$$\{w \equiv \iota_\nu(\alpha(\nu), \phi)\} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \{\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w)) \vee \neg\exists_{1\nu}(\alpha(\nu) \wedge (w \equiv \phi))\} \quad (\sharp)$$

gdzie ϕ jest formułą tej samej kategorii syntaktycznej co zmienna w oraz w ϕ nie występuje ν jako zmienna wolna.

Oznaczmy przez $\mathcal{J}^+$ język otrzymany z języka $\mathcal{J}$ przez dodanie do jego alfabetu symboli operatorów deskrypcji określonej. Literami S^+ i N^+ oznaczamy, odpowiednio, zbiór formuł zdaniowych i nazwowych języka $\mathcal{J}^+$. Operację konsekwencji Cn^+ w języku $\mathcal{J}^+$ otrzymujemy przez przyjęcie tych samych schematów aksjomatów i reguł, które określały logikę w języku $\mathcal{J}$, oraz dodatkowo przyjmujemy wszystkie formuły reprezentowane przez schematy (δ_1), (δ_2), bądź przez schemat $(\sharp)$.

Model dla języka $\mathcal{J}^+$ otrzymujemy z modelu $\mathcal{M}$ dla języka $\mathcal{J}$ przez wzbogacenie go o funkcje będące odpowiednio interpretacjami operatora deskrypcji wiążącego zmienne nazwowe i operatora deskrypcji wiążącego zmienne zdaniowe. Interpretacjami operatorów deskrypcji w modelu $\mathcal{M}$, zgodnie z definicjami (δ_1), (δ_2), są odpowiednio funkcje:

(xii) $\nu_o : U_s^{U_o} \times U_o \longrightarrow U_o$ określona $\nu_o(f, c) = d$, gdy d jest jedynym elementem z U_o takim, że $f(d) \in D$, a jeżeli takiego nie ma, to $d = c$.

(xiii) $\nu_s : U_s^{U_s} \times U_s \longrightarrow U_s$ określona $\nu_s(g, a) = b$, gdy b jest jedynym elementem z U_s takim, że $g(b) \in D$, a jeżeli takiego nie ma, to $b = a$.

Zauważmy, że jeżeli ustalony jest model $\mathcal{M} = (U_o, U_s, D, F)$ dla języka $\mathcal{J}$ bez operatorów deskrypcji, to formuły $\iota_x(\alpha(x), z)$, $\iota_p(\beta(p), r)$ dla każdego wartościowania zmiennych f mają jednoznacznie ustaloną wartość. Każdy więc model $\mathcal{M}$ dla języka $\mathcal{J}$ jednoznacznie przedłuża się do modelu $\mathcal{M}^+$ języka $\mathcal{J}^+$.

Oznaczmy symbolem $\mathcal{M}^+|_{\mathcal{J}}$ redukt modelu języka $\mathcal{J}^+$ do języka $\mathcal{J}$. Zachodzą wtedy następujące związki: dla każdego modelu $\mathcal{M}$ języka $\mathcal{J}$ istnieje jednoznacznie określony model $\mathcal{M}^+$ będący przedłużeniem modelu $\mathcal{M}$ o interpretację operatorów deskrypcji, oraz dla każdego modelu $\mathcal{M}^+$ istnieje jednoznacznie określony model $\mathcal{M}$ języka $\mathcal{J}$ taki, że zachodzi $\mathcal{M}^+|_{\mathcal{J}} = \mathcal{M}$.

Wynika stąd jako wniosek następujące twierdzenie Blooma o nietwórczości operatora deskrypcji.

Twierdzenie (Bloom, 1971). *Rozszerzenie języka $\mathcal{J}$ o operator deskrypcji jest nietwórcze, tzn. dla dowolnego zbioru $X \subset S$, zachodzi związek:*

$$S \cap Cn^+(X) = Cn(X).$$

Z twierdzenia o nietwórczości wynika:

Wniosek 1. *Jeżeli teoria T w W-języku $\mathcal{J}$ bez operatora deskrypcji jest niefregowska (tzn. nie jest jej twierdzeniem aksjomat Fregego), to w wyniku rozszerzenia języka $\mathcal{J}$ do języka $\mathcal{J}^+$ przez dodanie wszystkich formuł reprezentowanych przez schematy (♯) do teorii T, teoria ta pozostanie dalej teorią niefregowską.*

W dalszych rozważaniach ograniczmy się do WHQ^+-teorii, czyli do teorii WHQ w języku z operatorami deskrypcji. Zgodnie z określeniem

$$\mathsf{WHQ}^+ = Cn^+(\mathsf{WHQ}).$$

Z twierdzenia o nietwórczości Blooma wynika, że zachodzi równość

$$\mathsf{WHQ}^+ \cap S = \mathsf{WHQ}.$$

Równoważność (♯) możemy uważać za schemat aksjomatów logicznych. Zgodnie z Zasadą Wittgensteina wzmacniamy ją do równości (♯♯).

$$\{w \equiv \iota_v(\alpha(v), \phi)\} \equiv$$
$$\equiv \{\forall_v(\alpha(v) \leftrightarrow (v \equiv w)) \vee \neg\exists_{1v}(\alpha(v) \wedge (w \equiv \phi))\}. \quad (\sharp\sharp)$$

Schemat ($\sharp\sharp$) powstaje ze schematu ($\sharp$) przez zastąpienie spójnika równoważności spójnikiem identyczności.

Niech $\mathsf{WHQ}^{+\equiv} = Cn^+(\mathsf{WHQ} \cup \{(\sharp\sharp)\})$. Dowolną teorię T nazywamy $\mathsf{WHQ}^{+\equiv}$-teorią, gdy T jest teorią na gruncie konsekwencji Cn^+ oraz $\mathsf{WHQ}^{+\equiv} \subseteq \mathsf{T}$. Zbiór twierdzeń $\mathsf{WHQ}^{+\equiv}$ jest najmniejszą $\mathsf{WHQ}^{+\equiv}$-teorią.

Konsekwencją schematu ($\sharp\sharp$) wraz z aksjomatami WHQ są twierdzenia o 0-1 dowolnych formuł zdaniowych. Stwierdzają to następujące twierdzenia i wnioski:

Twierdzenie 1. *Jeżeli* T *jest* $\mathsf{WHQ}^{+\equiv}$*-teorią, czyli twierdzeniami teorii* T *są wszystkie formuły reprezentowane przez schemat*

$$\{w \equiv \iota_v(\alpha(v), w_0)\} \equiv$$
$$\equiv \{\forall_v(\alpha(v) \leftrightarrow (v \equiv w)) \vee \neg\exists_{1v}(\alpha(v) \wedge (w \equiv w_0))\} \quad (\sharp\sharp)$$

a ponadto

(a) $\mathsf{T} \vdash \exists_v\exists_w(v \not\equiv w)$,

(b) $\mathsf{T} \vdash \exists_{1v}\alpha(v)$,

to:

(c) $\mathsf{T} \vdash \forall_v((\alpha(v) \equiv 0) \vee (\alpha(v) \equiv 1))$, *czyli*

(d) $\mathsf{T} \vdash \forall_v(\alpha(v) \rightarrow (\alpha(v) \equiv 1))$,

(e) $\mathsf{T} \vdash \forall_v(\neg\alpha(v) \rightarrow (\alpha(v) \equiv 0))$.

Dowód. Udowodnimy najpierw, że zachodzi *(d)*. Z założenia *(b)* wynika, że istnieje w takie, że

1. $\forall_v(\alpha(v) \leftrightarrow (v \equiv w))$.

Z założenia *(a)* wynika, że istnieje w_0 takie, że

2. $\neg(w \equiv w_0)$, co skrótowo będziemy zapisywać: $w \not\equiv w_0$;
3. $\alpha(w) \leftrightarrow (w \equiv w)$ z 1.
4. $w \equiv \iota_v(\alpha(v), w_0)$ z *(b)*, ($\sharp\sharp$) oraz 1., 3.
5. $(w \equiv \iota_v(\alpha(v), w_0)) \equiv 1$ gdyż T jest WHQ-teorią.

Twierdzeniami dowolnej WHQ-teorii są formuły reprezentowane przez schematy:

6. $\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w)) \leqslant (\alpha(w) \leftrightarrow (w \equiv w))$;
7. $(\alpha(w) \leftrightarrow (w \equiv w)) \equiv \alpha(w)$;
8. $(w \equiv w_0) \equiv 0$ na podstawie 2. i tego, że T jest WHQ-teorią;
9. $(\neg\exists_{1\nu}\alpha(\nu) \wedge (w \equiv w_0)) \equiv 0$ na podstawie 8.
10. $\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w)) \leqslant \alpha(w)$ z 6. i 7.

Dla dowodu nie wprost zakładamy, że

11. $\alpha(w) \not\equiv 1$
12. $(\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w))) \not\equiv 1$ z 10. i 11.

Formuła 12. jest sprzeczna z (♯♯) na podstawie 5., 9., co dowodzi *(d)*.

Aby udowodnić, że zachodzi *(e)* zakładamy, podobnie jak w przypadku *(d)*, że spełnione są warunki:

1. $w \not\equiv w_0$;
2. $\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w))$;

oraz dla dowodu nie wprost zakładamy:

3. $\alpha(w_0) \not\equiv 0$, czyli $(\neg\alpha(w_0)) \not\equiv 1$.

Tautologią jest formuła o schemacie:

4. $(w \not\equiv w_0) \rightarrow (\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w)) \rightarrow \neg\alpha(w_0))$;

więc twierdzeniem WHQ jest formuła:

5. $(w \not\equiv w_0) \leqslant (\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w)) \rightarrow \neg\alpha(w_0))$.

Na podstawie schematu twierdzeń WHQ-teorii:

6. $((w \not\equiv w_0) \equiv 1) \rightarrow \{(\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w)) \rightarrow \neg\alpha(w_0)) \equiv 1\}$;
7. $(w \not\equiv w_0) \equiv 1$ z 1., gdyż T jest WHQ-teorią;
8. $\forall\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w)) \leqslant \neg\alpha(w_0)$ z 6. i 7.;
9. $\forall_\nu(\alpha(\nu) \leftrightarrow (\nu \equiv w)) \not\equiv 1$ z 3. i 8.;
10. $(w \equiv \iota_\nu(\alpha(\nu), w_0)) \equiv 1$ z 2.;
11. $\neg\exists_{1\nu}(\alpha(\nu) \wedge (w \equiv w_0)) \equiv 0$ z 1. oraz z WHQ.

Formuła 9. jest sprzeczna z (♯♯) na podstawie 8. i 11. W $\mathsf{WHQ}^{+\equiv}$-teoriach, w których twierdzeniami są formuły 1. i 2. założenie, że $\alpha(w_0) \not\equiv 0$ prowadzi do sprzeczności. □

Przytoczony tutaj dowód Twierdzenia 1. zawiera drobne poprawki dowodu przeprowadzonego w [9], strony 86–87. Jak pokazano w pracy [9], założenia *(a)*, *(b)* są istotne, wskazują na to podane tam stosowne przykłady.

Niech Z oznacza zbiór zdań (czyli formuł bez zmiennych wolnych) języka, w którym obowiązuje logika niefregowska. Zakładamy, że $\alpha \in \mathsf{Z}$ oraz $\alpha \in \mathsf{T}$, gdzie T jest dowolną $\mathsf{WHQ}^{+\equiv}$-teorią i niech $\alpha^{o}(\nu)$ oznacza formułę $\alpha \wedge (\nu \equiv \omega)$; gdzie ω jest dowolną stałą kategorii tej samej, co zmienna ν. Wtedy $\mathsf{T} \vdash \exists_{1\nu}(\alpha \wedge (\nu \equiv \omega))$. Dodatkowo zakładamy, że

$$\mathsf{T} \vdash \exists_{\nu}\exists_{w}(\nu \not\equiv w).$$

Zgodnie z Twierdzeniem 1 otrzymujemy:

$$\mathsf{T} \vdash \forall_{\nu}(\alpha^{o}(\nu) \to (\alpha^{o}(\nu) \equiv 1));$$

$$\mathsf{T} \vdash \alpha^{o}(\omega) \to ((\alpha \wedge (\omega \equiv \omega)) \equiv 1),$$

wynika stąd, że $\mathsf{T} \vdash \alpha \equiv 1$.

Analogicznie, jeżeli $\neg\alpha \in \mathsf{T}$, to $\mathsf{T} \vdash \exists_{1\nu}(\neg\alpha \wedge (\nu \equiv \omega))$. I stąd otrzymujemy, że $\neg\alpha \equiv 1$, a więc $\alpha \equiv 0$.

Wniosek 2. *Jeżeli* T *jest* $\mathsf{WHQ}^{+\equiv}$*-teorią taką, że:*

(i) $\mathsf{T} \vdash \exists_{\nu}\exists_{w}(\nu \not\equiv w)$,

to dla dowolnego zdania α *zachodzi* $\mathsf{T} \vdash (\alpha \equiv 1) \vee (\alpha \equiv 0)$.

Aby zilustrować nasze rozważania, ograniczymy się do języków, w których nie występują zmienne nazwowe. Modelami skończonymi WHQ^{+}-teorii są skończone algebry Henlego (algebry Boole'a z dodaną operacją zero-jedynkową identyczności) z wyróżnionym ultrafiltrem.

Weźmy pod uwagę formułę $\eta(p)$ określoną za pomocą następującej definicji równościowej: $\eta(p) \equiv (p \wedge (p \not\equiv 1))$ oraz model $\mathcal{M}$ dla języka $\mathcal{J}^{+}$, którego uniwersum zmiennych zdaniowych jest czteroelementową algebrą Boole'a na zbiorze $U_s = \{0, e, -e, 1\}$; a zbiorem wartości wyróżnionych jest zbiór $D = \{1, e\}$. Zgodnie z (♯) otrzymujemy:

$$(q \equiv \iota_{p}(\eta(p), 1)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \{\forall_{p}(\eta(p) \leftrightarrow (p \equiv q)) \vee \neg\exists_{1p}(\eta(p) \wedge (q \equiv 1))\}. \quad (+)$$

Aby sprawdzić, czy formuła (+) jest prawdziwa w modelu $\mathcal{M}$, zastosujemy pomocniczo notację: $|\alpha, f|$ oznacza wartość semantyczną formuły α

dla wartościowania zmiennych $\mathfrak{f}$. W przypadku, gdy wartość semantyczna formuły α jest stała w modelu $\mathcal{M}$, czyli nie zależy od wartościowania zmiennych wolnych, to wartość tę oznaczamy $|\alpha|$.

Prosty rachunek wskazuje na to, że w modelu $\mathcal{M}$ zachodzą związki:

$$|\iota_{\mathfrak{p}}(\eta(\mathfrak{p}),1)| = e, \qquad |\exists_{1\mathfrak{p}}\eta(\mathfrak{p})| = 1$$

oraz formuła (+) jest spełniona w modelu $\mathcal{M}$ dla każdej wartości zmiennej $\mathfrak{q}$. Jeśli jednak formułę (+) wzmocnimy do równości:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{q} \equiv \iota_{\mathfrak{p}}(\eta(\mathfrak{p}),1)) \equiv \\ \equiv \{\forall_{\mathfrak{p}}(\eta(\mathfrak{p}) \leftrightarrow (\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q})) \vee \neg\exists_{1\mathfrak{p}}(\eta(\mathfrak{p}) \wedge (\mathfrak{q} \equiv 1))\},\end{aligned} \quad (++)$$

to dla dowolnych wartościowań takich, że $|\mathfrak{q},\mathfrak{f}| = e$ lub $|\mathfrak{q},\mathfrak{f}| = -e$, równość (++) nie jest spełniona.

Z formuły (+) na podstawie schematu $\alpha \leftrightarrow \exists_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q} \wedge (\mathfrak{q} \equiv \alpha))$ otrzymujemy równoważność

$$\iota_{\mathfrak{p}}(\eta(\mathfrak{p}),1) \leftrightarrow \exists_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q} \wedge (\mathfrak{q} \equiv \iota_{\mathfrak{p}}(\eta(\mathfrak{p}),1))).$$

Po uwzględnieniu, że $|\iota_{\mathfrak{p}}(\eta(\mathfrak{p}),1)| = e$ oraz $|\mathfrak{q} \equiv \iota_{\mathfrak{p}}(\eta(\mathfrak{p}),1),\mathfrak{f}| = |\mathfrak{q},\mathfrak{f}| = e$ kolejno otrzymujemy

$$e \div ((0 \cap (0 \circ e)) \cup (e \cap (e \circ e)) \cup (-e \cap (-e \circ e)) \cup (1 \cap (1 \circ e))) =$$
$$= e \div (e \cap 1) = e \div e.$$

Dowodzi to, że w języku $\mathcal{J}^+$ istnieje formuła $\alpha(\nu)$ taka, że zdanie $\exists_\nu \alpha(\nu)$ jest prawdziwe w pewnym WHQ-modelu $\mathfrak{m}^+$, oraz dla pewnego wartościowania zmiennych $\mathfrak{f}$ zachodzi:

$$0 \neq |\alpha(\nu),\mathfrak{f}| \neq 1,$$

co oznacza, że aksjomat Fregego nie jest twierdzeniem pewnej WHQ^+-teorii określonej w języku $\mathcal{J}^+$. Możemy więc bez sprzeczności przyjąć w języku $\mathcal{J}^+$ zbiór założeń:

$$\mathsf{WHQ}^+ \cup \{\exists_{\mathfrak{p}}(0 \neq \mathfrak{p} \neq 1)\},$$

co nie znaczy, że możemy tak zrobić w przypadku $\mathsf{WHQ}^{+\equiv}$-teorii.

Głównym rezultatem tego artykułu jest pokazanie, że wzmocnienie WHQ-teorii przez schemat (♯), będący schematem równoważnościowym definicji operatorów deskrypcji, nie prowadzi do aksjomatu Fregego. Natomiast wzbogacenie tych teorii o schemat (♯♯), który jest schematem pewnych równości charakteryzujących operatory deskrypcji, prowadzi do aksjomatu Fregego.

Zagadnienie „logika niefregowska a argument «z procy»" jest żywo dyskutowane w polskiej, jak i w światowej, literaturze logicznej. Problemy te poruszali w swoich pracach między innymi: A. Biłat [1], S. Kovac i K. Świętorzecka [3], W. Krysztofiak [4], Y. Shramko i H. Wansing [9], R. Wójcicki [16], [17], B. Wolniewicz [20], A. Wójtowicz [18], [19]. W dużej mierze tej problematyce poświęcona jest książka: *Aporie ontologii sytuacji* pod red. Andrzeja Biłata, Wydawnictwo UMCS, Lublin 2009.

Literatura

1. A. Biłat. Filozoficzne podstawy logiki sytuacji. W A. Biłat, redakcja, *Aporie ontologii sytuacji*, ss. 95–153, Wydawnictwo UMCS, Lublin, 2009.
2. S.L. Bloom. A completeness theorem for "theories of kind W". *Studia Logica*, 27:43–56, 1971.
3. S. Kovac and K. Świętorzecka. Gödel's "slingshot argument" and his theological systems. W K. Świętorzecka, redakcja, *Gödel's Ontological Argument: History, Modifications, and Controversies*, ss. 123–162, Semper, Warszawa 2016.
4. W. Krysztofiak. Co wyraża argument *slingshot*?. W A. Biłat, redakcja, *Aporie ontologii sytuacji*, ss. 31–73, Wydawnictwo UMCS, Lublin, 2009.
5. H. Lewandowski and R. Suszko. A note of concerning of descriptions, *Studia Logica*, 22:51–55, 1968.
6. M. Omyła and R. Suszko. Descriptions in theories of kind W, *Bulletin of the Section of Logic*, 1(3):8–13, 1972.
7. M. Omyła. Boolean theories with quntifiers, *Bulletin of the Section of Logic*, 7(2):76–83, 1978.
8. M. Omyła. Deskrypcje w logice niefregowskiej. W A. Biłat, redakcja, *Aporie ontologii sytuacji*, ss. 75–93, Wydawnictwo UMCS, Lublin, 2009.
9. Y. Shramko and H. Wansing. The slingshot argument and sentential identity, *Studia Logica*, 91:429–455, 2009.
10. J. Pogonowski. Formal methods in linguistics. *Buffalo Papers in Linguistics*, 1(3):31–83, 1979.
11. J. Pogonowski. Lingwistyka a teoria modeli. W J. Pelc, redakcja, *Znaczenie i prawda*, ss. 221–231, PWN, Warszawa, 1994.
12. J. Pogonowski. W sprawie programu badawczego lingwistyki formalnej. W J. Pelc, redakcja, *Język współczesnej humanistyki*, ss. 325–335, Polskie Towarzystwo Semiotyczne, Warszawa, 2000.

13. J. Pogonowski. On some applications of extended mereology. *Acta Universitatis Wratisslaviensis*, (23)2754:89–100, 2005.
14. R. Suszko. Ontologia w Traktacie L. Wittgensteina. *Studia Filozoficzne*, 1:97–121, 1968.
15. R. Suszko. Non-Fregean logic and theories. *Analele Universităţii Bucureşti, Acta Logica*, 11:105–125, 1968.
16. R. Wójcicki. Romana Suszki semantyka sytuacyjna. *Studia Fiozoficzne*, 7:3–19, 1984.
17. R. Wójcicki. Semantyka sytuacyjna logiki niefregowskiej. W J. Pelc, redakcja, *Znaczenie i prawda*, ss. 261–283, Biblioteka Myśli Semiotycznej, Warszawa, 1994.
18. A. Wójtowicz. Ontologia sytuacji, argument slingshot i logika niefregowska. *Studia Philosophiae Christiane*, 2:57–69, 2005.
19. A. Wójtowicz. *Znaczenie nazw a znaczenie zdań. W obronie ontologii sytuacji*. Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa, 2007.
20. B. Wolniewicz. O tak zwanym wywodzie jak z procy. *Filozofia i wartości IV*, ss. 43–52, WFiS UW, Warszawa, 2016.

Dedukcyjne dylematy: przypadek niefregowski*

Joanna Golińska-Pilarek

Streszczenie W pracy przedstawiono nową procedurę decyzyjną $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ dla najsłabszej niefregowskiej logiki zdań, SCI, nad klasycznym rachunkiem zdań. Konstrukcja systemu wykorzystuje pewne mechanizmy charakterystyczne dla rozumowań semantycznych. Działanie systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ ilustrujemy na przykładach, a następnie omawiamy ideę dowodu jego terminacji, poprawności i pełności.

Formalne systemy dedukcyjne to szeroki obszar badań logicznych, mający ogromne znaczenie nie tylko dla logiki, ale również dla tych obszarów wiedzy, w których formalne narzędzia logiczne znajdują praktyczne zastosowania. Współczesne badania w tym zakresie koncentrują się zazwyczaj na poszukiwaniu efektywnych systemów dedukcyjnych, które można łatwo poddać komputerowej implementacji, lub na konstruowaniu systemów mających pożądane strukturalne własności. Z perspektywy logicznej, a w pewnym zakresie również filozoficznej, dobrze ugruntowanym rodzajem systemu dedukcyjnego jest system aksjomatyczny w stylu hilbertowskim. Konstrukcja takiego systemu polega na wskazaniu aksjomatów i reguł wnioskowania, za pomocą których konstruuje się dowód rozumiany

Joanna Golińska-Pilarek e-mail: j.golinska@uw.edu.pl
Wydział Filozofii, Uniwersytet Warszawski

* Wyniki przedstawione w pracy zostały uzyskane w ramach realizacji projektu nr 2017/25/B/ HS1/00503, finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

zazwyczaj jako odpowiedni ciąg formuł kończący się dowodzoną formułą i mający określone własności. Systemy aksjomatyczne stosunkowo łatwo poddają się analizie leżących u podstaw danej logiki podstawowych zasad dedukcji. Jednak z perspektywy praktycznej tego rodzaju systemy nie są specjalnie użyteczne. Konstrukcja dowodów nawet prostych praw może być zadaniem technicznie niezwykle trudnym. Dodatkowym problemem tego rodzaju systemów jest to, że sposób przeprowadzania dowodów daleko odbiega od naturalnych rozumowań, które intuicyjnie uznajemy za poprawne.

Pierwsze próby konstrukcji systemów dedukcyjnych, które w swojej metodologii naśladowałyby naturalne metody rozumowań, podjęto w latach dwudziestych XX wieku, czego efektem są dobrze dziś znane systemy Gentzena i systemy naturalnej dedukcji. Jeszcze inną metodologię dedukcji zakładają systemy tablicowe, które badane są intensywnie od lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku (zob. [1, 4, 13]). Systemy te wykorzystują metodę drzew semantycznych, umożliwiającą konstrukcję systemu, który nie tylko symuluje naturalne sposoby dedukcji, ale przede wszystkim jest łatwy w implementacji i zazwyczaj bardziej efektywny niż systemy tradycyjne.

Oryginalny system dedukcyjny dla zdaniowego rachunku z identycznością SCI, będącego najsłabszą zdaniową logiką niefregowską opartą na logice klasycznej, jest systemem aksjomatycznym w stylu hilbertowskim. Jednak już w pracach samego Suszki znaleźć można pierwsze próby wykorzystania metody semantycznej w konstrukcji procedury decyzyjnej dla SCI (zob. [2]). Systemy w stylu Gentzena dla SCI przedstawiono w pracach [10, 16, 17, 3]. Pierwszy system w stylu tablic dualnych zaproponowano w [5] (cf. [12]), a jego zmodyfikowaną wersję w [9]. Wszystkie te systemy mają jedną wspólną wadę, a mianowicie nie są to procedury decyzyjne, choć SCI jest rozstrzygalny. W pracach [8] i [7] zaproponowano więc systemy tablicowe, które nie tylko są poprawne i pełne, ale również mają własność terminacji i zostały zaimplementowane w postaci programów komputerowych.

System $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ z [8] jest systemem etykietowanym. Dowody w tym systemie, jak w tradycyjnych systemach tablicowych, mają formę drzew, których konstrukcję zaczyna się od negacji formuły, a następnie za pomocą reguł wnioskowania dekomponuje się wyjściową formułę do formuł mniej złożonych lub takich, na których dedukcja jest prostsza, aż do uzyskania

jawnej sprzeczności. W systemie tym dedukcję przeprowadza się w języku istotnie bogatszym niż język SCI. Do języka SCI dodajemy bowiem nieskończenie wiele etykiet, reprezentujących denotacje formuł, oraz znak równości reprezentujący relację identyczności pomiędzy etykietami. Reguły systemu $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$, kodujące podstawowe własności semantyczne operatorów zdaniowych SCI, dekomponują formuły w taki sposób, że w każdym kroku dedukcji każdej formule uzyskanej przez zastosowanie jakiejś reguły nadana jest etykieta reprezentująca jej denotację wraz z wyczerpującą informacją o równościach pomiędzy etykietami. W ten sposób dedukcja w SCI redukuje się do prostego rachunku równości. Otwarta gałąź drzewa w systemie $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ dostarcza wyczerpującej informacji o denotacjach wszystkich podformuł formuł znajdujących się na gałęzi, ich wzajemnych zależnościach i równościach ze względu na występujące w nich operatory zdaniowe. System $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ stanowi więc również narzędzie konstrukcji modeli formuł spełnialnych, które nie są tautologiami SCI. Reguły systemu $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ są dość intuicyjne, choć użycie etykiet oraz w pewnym sensie nadmiarowe ich przypisywanie każdej podformule wraz z meta-regułami kodującymi kongruentność spójnika identyczności, powodują, że konstrukcja drzew nawet prostych tautologii SCI może być procesem czasochłonnym i żmudnym.

Z kolei system $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ z pracy [7] to system w stylu tablic dualnych. Dowody również mają formę drzew, ale ich konstrukcję rozpoczyna się od formuły, której dowodu się poszukuje. $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ jest więc systemem weryfikującym bezpośrednio tautologiczność, podczas gdy system $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ weryfikuje niespełnialność. W odróżnieniu od systemu $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$, język dedukcji w systemie $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ jest dokładnie taki sam jak język SCI. Co więcej, system $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ ma 8 specyficznych reguł dla identyczności, zaś $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ tylko 3. Reguły te kodują fundamentalne semantyczne własności spójnika identyczności: (1) symetrię; (2) ekstensjonalność, która to własność pozwala wymieniać w dowolnym kontekście formuły identyczne; (3) współspełnialność formuł identycznych. Dowody w $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ są często prostsze niż w $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$, jednak ich konstrukcja – ze względu na mniej deterministyczny charakter reguł – może wymagać większej kreatywności. Wstępne testy implementacji tych dwóch systemów wskazują, że żaden z nich nie jest w sposób absolutny bardziej efektywny od drugiego. Istnieją bowiem formuły, których dowody w $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ wymagają znacznie większej liczby wierzchołków i dłuższych gałęzi niż ich dowody w $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$. Są jednak i takie formuły,

w przypadku których sytuacja się odwraca i to system $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ znajduje szybciej ich dowód.

Systemy $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ i $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ mają więc swoje wady i zalety. Niewątpliwą zaletą $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ jest użycie etykiet, reprezentujących denotacje formuł, które pozwalają odtworzyć rozumowania semantyczne. Wadą jest ich nadmiarowe użycie, gdyż nawet wtedy, gdy już mamy informację o identyczności dwóch formuł, każdej z nich nadajemy inną etykietę i dodajemy informację o równości tych etykiet. W ten sposób weryfikację tautologiczności sprowadzamy do weryfikacji niesprzeczności pewnego układu równości. Układ ten może więc zawierać wiele równości, które można by wyeliminować na wcześniejszym etapie dedukcji. Jednak ze względu na brak reguły podstawiania w systemie $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ nie jest to możliwe. Taką możliwość mamy w systemie $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$, gdzie reguła podstawiania gra kluczową rolę. Jeśli wiemy, że formuły φ i ψ są identyczne, zastępujemy każde wystąpienie jednej z nich, powiedzmy ψ, formułą φ i dalszą dedukcję przeprowadzamy już bez odwoływania się do formuły ψ. Eliminowanie zbędnych informacji, które nie mają wpływu na proces dedukcji, znacznie upraszcza konstrukcję dowodów. Wadą $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ jest niedeterministyczny charakter reguły podstawiania, co powoduje, że w pewnych sytuacjach identyfikacja właściwego podstawienia może wymagać wielu prób i błędów.

W pracy tej prezentujemy nowy system tablicowy dla SCI, oznaczany symbolem $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$, który stanowi próbę syntetycznego wykorzystania zalet systemów $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$ i $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$, z pominięciem ich wad. W systemie $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ funkcję etykiet pełnią nowe zmienne zdaniowe wprowadzane przez reguły dekomponujące złożone identyczności. Dzięki temu językiem dedukcji w $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ jest po prostu język SCI. W systemie $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ obowiązuje również reguła umożliwiająca podstawianie „równych pod równe". Informacje o formułach identycznych są wprawdzie przechowywane, ale w procesie dedukcji przetwarzana jest wyłącznie najmniejsza (w sensie złożoności) formuła reprezentująca wszystkie formuły z nią identyczne. Ponadto system $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ sprowadza każdą nie-tautologiczną formułę do współspełnialnego z nią zbioru formuł prostych, dzięki czemu otwarta gałąź $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa daje wyczerpujące informacje umożliwiające konstrukcję kontrmodelu takiej nie-tautologicznej formuły.

Ważną inspiracją w poszukiwaniach *naturalnego* systemu dedukcyjnego dla SCI był artykuł [13] Profesora Pogonowskiego pod tytułem *Agnostyczny jeż w lesie semantycznym*, dotyczący wykorzystania metod

tablic semantycznych w nauczaniu logiki. Ze względu na to, że reguły systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ symulują naturalne rozumowania semantyczne, jakie w praktyce logicznej przeprowadza ludzki użytkownik SCI, system ten można wykorzystać w praktyce dydaktycznej.

Praca składa się z czterech sekcji. W Sekcji 1 przypominamy podstawowe pojęcia dotyczące SCI – język, aksjomatyzację i semantykę. W Sekcji 2 prezentujemy reguły systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ oraz jego główne założenia, a następnie na przykładach omawiamy działanie systemu. W Sekcji 3 przedstawiamy ideę dowodu twierdzenia o poprawności i pełności. Ostatnia sekcja stanowi krótkie podsumowanie przedstawionych w pracy wyników.

***

Tekst ten dedykuję Profesorowi Jerzemu Pogonowskiemu w podziękowaniu i wdzięczności za to, że miałam okazję spotkać Go na swojej drodze zawodowej i korzystać z Jego wiedzy, mądrości i życzliwości.

Do Profesora Pogonowskiego mam stosunek bardzo sentymentalny, wiec pozwolę sobie na kilka osobistych wspomnień. Poznaliśmy się zimą 2000 roku w trakcie kameralnej konferencji *IV Warsztaty Logiki, Informatyki i Filozofii Nauki „Tarski versus Hilbert"* w Zakopanem. Profesor Pogonowski był wtedy profesorem, ja początkującą doktorantką. Pierwszego dnia obrad Profesor Pogonowski podszedł do mnie i powiedział: „Ach, to Pani grała na flecie!". Dość niezwykłe słowa jak na początek znajomości z profesorem. Otóż w hotelu, w którym odbywała się konferencja, mieszkaliśmy w sąsiednich pokojach, a ja na balkonie swojego pokoju rzeczywiście grywałam na flecie altowym, nieświadoma znaczenia i skutków tej artystycznej działalności. Nasza rozmowa szybko przeszła na tematy zawodowe. Zajmowałam się wtedy kwantyfikatorami rozgałęzionymi, a tematyka ta – jak wówczas sądziłam – nie była dobrze znana w filozoficznym środowisku logików w Polsce. Miałam więc przekonanie, że odpowiedź na pytanie „Czym się Pani zajmuje?" wymaga dłuższego wstępu i wyjaśnień. Jednak nie w przypadku Profesora Pogonowskiego! Wystarczyło kilka zdań o tym, co zrobiłam i co zamierzam zrobić w pracy doktorskiej, gdy usłyszałam „To miał być mój doktorat! Doktorat u prof. Mostowskiego, ale nie dałem rady". Było w tym coś niezwykłego i pokrzepiającego, bo pro-

blemy dotyczące kwantyfikatorów rozgałęzionych, które chciałam wtedy rozwiązać, wydawały się ogromnie trudne. Życie pokazało, że nie był to również mój doktorat.

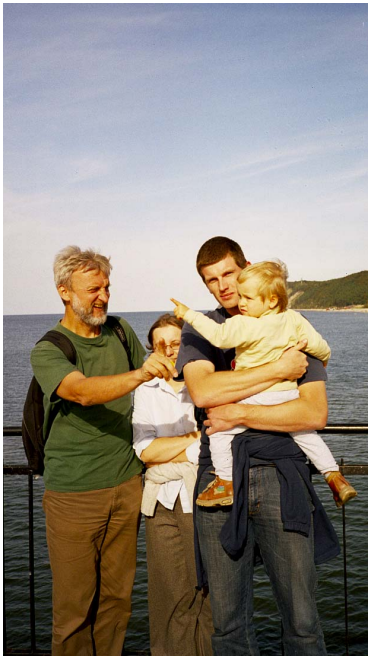
Wkrótce zmieniłam tematykę pracy doktorskiej i zajęłam się logiką niefregowską. Jedną z pierwszych moich lektur był fundamentalny dla tej części logiki tekst Romana Suszki *Odrzucenie aksjomatu Fregego* w tłumaczeniu Jerzego Pogonowskiego [15]. Do dziś znam na pamięć obszerne fragmenty tego tekstu, w czym ogromną rolę odegrał mistrzowski i językowo zaskakujący przekład Profesora. W 2004 roku spotkaliśmy się ponownie na Zjeździe Filozoficznym w Szczecinie. Byłam świeżo po doktoracie, z referatem o uzyskanych w doktoracie wynikach dotyczących zdaniowych logik niefregowskich (w tym: istnieje kontinuum wiele nierównoważnych rozszerzeń SCI). I tym razem okazało się, że trudno zaskoczyć Profesora Pogonowskiego. Wiedział o logikach niefregowskich wszystko. Mieliśmy wtedy okazję dużo rozmawiać i były to rozmowy nie tylko o logice. W trakcie wspólnych wycieczek w okolice Szczecina Profesor wiele opowiadał o Suszce, warszawskim środowisku logików i matematyków z czasów Andrzeja Mostowskiego i ogólnie o życiu akademickim.

Niezwykłą pamiątką po tym spotkaniu są zdjęcia, które Profesor Pogonowski robił przy różnych okazjach w trakcie konferencji i naszych wycieczek. Zdjęcia te są wyjątkowe nie tylko ze względu na ich dokumentacyjne i emocjonalne znaczenie. Każde zdjęcie zostało przez Profesora Pogonowskiego nazwane; krótko, zabawnie, refleksyjnie. Chwile uchwycone na zdjęciach zyskują wtedy na znaczeniu: „Jest kontinuum sytuacji, w których warto wypić" (na zdjęciu ja i Prof. Omyła z kieliszkami w rękach w trakcie bankietu konferencyjnego), „Dwa epsilon npm" (ja z moim dwuletnim wówczas synem na tle morza), „Pokoleniowe wybory kierunków" (zdjęcie Prof. Dzika i mojego syna, którzy wskazują palcami w róż-

Początek dłuuugiego jeszcze marszu

nych kierunkach), „Początek dłuuugiego jeszcze marszu” (zdjęcie mojego syna spacerującego po pustej plaży), „Przedjesiennie” (ja z Prof. Pogonowskim). Dziś wiem, że takie „konferencyjne” chwile Profesor Pogonowski dokumentuje i komentuje regularnie, o czym mogłam się przekonać na kolejnych konferencjach, na których się spotykaliśmy.

Dwa epsilon npm



Pokoleniowe wybory kierunków

Po doktoracie życie pchnęło mnie w jeszcze inne rejony badawcze. Zaczęłam współpracę z Prof. Orłowską i przez kilkanaśnie kolejnych lat zajmowałam się systemami dedukcyjnymi, przede wszystkim tablicami dualnymi (dual tableaux). Była to problematyka, która interesowała również Profesora Pogonowskiego, i szybko okazało się, że i w tym obszarze wiele nas łączy. Mam wrażenie, że gdybym teraz zmieniła tematykę badawczą, znowu by się okazało, że Profesor Pogonowski siedzi w tym od dawna!

Przez te wszystkie lata naszej znajomości mogłam podziwiać erudycję, szeroką wiedzę i wrażliwość filozoficzną Profesora Pogonowskiego, a Jego

Przedjesiennie

styl pisania prac naukowych pozostanie dla mnie niedoścignionym wzorem. Wszystkie dyskusje, rozmowy i kontakty naukowe z Profesorem były też zawsze wielką inspiracją. Z takiej też inspiracji zrodził się i ten tekst. System $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ to prezent.

1 Zdaniowy rachunek z identycznością SCI

W sekcji tej przypominamy podstawowe pojęcia dotyczące zdaniowego rachunku z identycznością SCI, wprowadzonego przez Romana Suszkę w artykule [14]. Filozoficzne założenia rachunku SCI omówione są w pracy [15]. Szczegółowe wprowadzenie do logik niefregowskich znaleźć można między innymi w pracach [11] i [6]. W swoim oryginalnym sformułowaniu SCI powstaje przez dodanie do klasycznego rachunku zdań (ze spójnikami negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności) nowego spójnika identyczności, oznaczanego symbolem $\equiv$, i aksjomatów określających jego podstawowe własności. W pracy tej będziemy rozważać uproszczoną wersję logiki SCI, uznając za pierwotne spójniki negacji, implikacji i identyczności. Z perspektywy logicznej to filozoficznie silne założenie jest tylko drobnym uproszczeniem, gdyż wszystkie wyniki przedstawione w tej pracy można rozszerzyć do pełnej wersji SCI.

Język SCI

Język SCI zbudowany jest ze zmiennych zdaniowych $\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \ldots$, operatorów (spójników) zdaniowych $\neg$ (negacji), $\rightarrow$ (implikacji), $\equiv$ (identyczności) oraz symboli pomocniczych (nawiasy). Przeliczalnie nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych oznaczamy symbolem V. Zbiór formuł SCI, oznaczany symbolem FOR, to najmniejszy zbiór zawierający zmienne zdaniowe i domknięty na operatory zdaniowe. W dalszej części pracy literami $\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \ldots$ będziemy również oznaczać metazmienne przebiegające zbiór V.

SCI-formuły o postaci $\varphi \equiv \psi$, gdzie $\varphi, \psi \in \mathsf{FOR}$, będziemy nazywać *identycznościami*. Zbiór wszystkich identyczności oznaczamy symbolem ID. Wyrażenie $\varphi \not\equiv \psi$ jest skrótem dla formuły $\neg(\varphi \equiv \psi)$. Wyrażenie $\mathsf{Sub}(\varphi)$ oznacza zbiór wszystkich podformuł formuły φ, a jeśli Φ jest

zbiorem formuł, to $\mathsf{Sub}(\Phi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{\varphi\in\Phi} \mathsf{Sub}(\varphi)$. Wyrażenie $\varphi(\psi)$ oznacza, że $\psi \in \mathsf{Sub}(\varphi)$, zaś $\varphi(\psi/\vartheta)$ oznacza formułę, która powstaje przez zastąpienie wszystkich wystąpień ψ w φ formułą ϑ. Zdefiniujemy teraz dwuargumentową relację $<$ na formułach SCI. Niech Φ będzie dowolnym zbiorem SCI-formuł, zaś $\varphi, \psi \in \Phi$. Definiujemy:

$\varphi < \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\varphi| < |\psi|$ albo $|\varphi| = |\psi|$ oraz φ poprzedza ψ w porządku leksykograficznym,

gdzie $|\varphi|$ oznacza liczbę symboli występujących w φ. Zakładamy, że przyjęty w definicji porządek leksykograficzny jest dobrym porządkiem na FOR, dzięki czemu relacja $<$ jest dobrym porządkiem na Φ.

SCI-formułę nazywamy *prostą*, gdy ma jedną z następujących postaci dla dowolnych $p, q, r \in \mathsf{V}$ i $\# \in \{\rightarrow, \equiv\}$:

$$p, \neg p, p \equiv q, p \not\equiv q, p \equiv \neg q, p \equiv (q \# r)$$

Zbiór formuł Φ nazywamy *kopią* zbioru formuł Φ', gdy $\Phi \subseteq \Phi'$.

Aksjomatyzacja SCI

Aksjomatami SCI są wszystkie tautologie klasycznego rachunku zdań w języku SCI oraz wszystkie formuły mające następującą postać:

Ax1 $\quad \varphi \equiv \varphi$
Ax2 $\quad (\varphi \equiv \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
Ax3 $\quad (\varphi \equiv \psi) \rightarrow (\neg\varphi \equiv \neg\psi)$
Ax4 $\quad (\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\chi \equiv \theta) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \equiv (\psi \rightarrow \theta)))$
Ax5 $\quad (\varphi \equiv \psi) \rightarrow ((\chi \equiv \theta) \rightarrow ((\varphi \equiv \chi) \equiv (\psi \equiv \theta)))$

Jedyną regułą inferencji jest klasyczna reguła odrywania oznaczana symbolem (MP). Formuła φ jest *dowodliwa w* SCI (SCI-dowodliwa), gdy istnieje skończony ciąg SCI-formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, dla $n \geqslant 1$, taki, że $\varphi_n = \varphi$ oraz dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, formuła φ_i jest aksjomatem SCI lub powstaje przez zastosowanie reguły odrywania do formuł wcześniejszych w ciągu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Taki ciąg formuł dla φ będziemy nazywać *dowodem* φ *w* SCI. Formuły, które są dowodliwe w SCI, będziemy również nazywać SCI-twierdzeniami. Formułę φ będziemy nazywać *wywodliwą w* SCI *ze zbioru* X, w skrócie $X \vdash \varphi$, gdy istnieje skończony ciąg formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, dla $n \geqslant 1$, taki, że $\varphi_n = \varphi$ oraz dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$,

formuła φ_i jest aksjomatem SCI lub formułą należącą do zbioru X lub powstaje przez zastosowanie reguły odrywania do formuł wcześniejszych w ciągu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Semantyka

SCI-*model* to struktura o postaci $\mathcal{M} = (U, D, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv})$, gdzie $U \neq \varnothing$ jest *uniwersum* modelu $\mathcal{M}$ (zwanym też uniwersum sytuacji), $\varnothing \neq D \subset U$ jest *zbiorem wartości wyróżnionych* (zwanym też zbiorem faktów), zaś $\tilde{\neg} : U \longrightarrow U$, $\tilde{\rightarrow} : U \times U \longrightarrow U$ oraz $\tilde{\equiv} : U \times U \longrightarrow U$ są algebraicznym operacjami interpretującymi odpowiednio spójniki $\neg$, $\rightarrow$, i $\equiv$, spełniającymi następujące warunki, dla dowolnych $a, b \in U$:

$\tilde{\neg}a \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin D$,
$a \tilde{\rightarrow} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \notin D$ lub $b \in D$,
$a \tilde{\equiv} b \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Wartościowanie w SCI-modelu $\mathcal{M} = (U, D, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv})$ to funkcja $\nu : \mathsf{FOR} \longrightarrow U$, która dla dowolnych $\varphi, \psi \in \mathsf{FOR}$ spełnia następujące warunki:

$\nu(\neg\varphi) = \tilde{\neg}\nu(\varphi)$
$\nu(\varphi \# \psi) = \nu(\varphi) \tilde{\#} \nu(\psi)$, dla $\# \in \{\rightarrow, \equiv\}$.

Element $a \in U$ taki, że $a = \nu(\varphi)$ nazywamy *denotacją* φ lub *sytuacją opisywaną przez zdanie* φ. Formułę φ nazywamy *spełnioną* w SCI-modelu $\mathcal{M} = (U, D, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv})$ przez wartościowanie ν w $\mathcal{M}$ (symbolicznie: $\mathcal{M}, \nu \models \varphi$), gdy $\nu(\varphi) \in D$, to znaczy denotacja φ w $\mathcal{M}$ należy do zbioru wartości wyróżnionych w $\mathcal{M}$. Formuła φ jest *spełnialna*, gdy istnieje SCI-model $\mathcal{M}$ i wartościowanie ν takie, że $\mathcal{M}, \nu \models \varphi$. Formułę φ nazywamy *prawdziwą* w modelu $\mathcal{M} = (U, D, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv})$ (symbolicznie: $\mathcal{M} \models \varphi$), gdy jest spełniona w $\mathcal{M}$ przez wszystkie wartościowania w $\mathcal{M}$, zaś φ nazywamy *tautologią* SCI, gdy jest prawdziwa we wszystkich SCI-modelach. Zbiór formuł Φ nazywamy spełnialnym w SCI, gdy istnieje SCI-model i wartościowanie spełniające wszystkie formuły z Φ.

Pełność SCI

Rachunek SCI jest poprawny i pełny, co zostało udowodnione w pracy [2]:

Twierdzenie 1 (Poprawność i pełność SCI)**.**
Dla dowolnej SCI*-formuły* φ *następujące warunki są równoważne:*

1. φ *jest tautologią* SCI.
2. φ *jest twierdzeniem* SCI. $\dashv$

Z perspektywy teoriodowodowej konstruowanie dowodów w aksjomatyzacjach hilbertowskich nie jest zadaniem łatwym i SCI nie stanowi tu wyjątku. Znalezienie dowodu nawet prostej tautologii może wymagać kreatywności. Jako przykład rozważmy formułę $(p \equiv q) \to (q \equiv p)$, której dowód przedstawiamy poniżej, a która wyraża fakt, że spójnik $\equiv$ reprezentuje relację symetryczną.

Zastosujemy następujące skróty:

$\alpha := (p \equiv p)$
$\beta := (p \equiv q)$
$\gamma := (q \equiv p)$
$\delta := ((p \equiv p) \equiv (q \equiv p))$
KRZ – tautologia klasycznego rachunku zdań w języku SCI

Dowód formuły $\beta \to \gamma$:

1.	α	Ax1
2.	$\beta \to (\alpha \to \delta)$	Ax5
3.	$\delta \to (\alpha \to \gamma)$	Ax2
4.	$\alpha \to [(\beta \to (\alpha \to \delta)) \to ((\delta \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to \gamma))]$	KRZ
5.	$(\beta \to (\alpha \to \delta)) \to ((\delta \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to \gamma))$	MP$(1,4)$
6.	$(\delta \to (\alpha \to \gamma)) \to (\beta \to \gamma)$	MP$(2,5)$
7.	$\beta \to \gamma$	MP$(3,6)$

Symetrię $\equiv$ można więc udowodnić w 7 wierszach, ale sam dowód nie jest ani intuicyjny, ani prosty, gdyż znalezienie odpowiednich instancji aksjomatów dla identyczności, od których dowód należy zacząć, a następnie odpowiednich tautologii klasycznego rachunku zdań, dzięki którym przy użyciu reguły modus ponens otrzymuje się dowodzoną formułę, jest raczej efektem pewnej formalnej kombinatoryki niż *naturalnej* dedukcji. Twierdzenie o pełności umożliwia oczywiście semantyczną weryfikację dowodliwości formuł, co w przypadku dowodzonej powyżej formuły prowadzi do prostego i dość naturalnego dowodu symetrii $\equiv$ bezpośrednio w semantyce:

Semantyczny dowód formuły $(p \equiv q) \to (q \equiv p)$:
Niech $\mathcal{M} = (U, D, \tilde{\neg}, \tilde{\to}, \tilde{\equiv})$ będzie dowolnym SCI-modelem, zaś v dowolnym wartościowaniem w $\mathcal{M}$. Wykażemy, że:

(*) $\quad v((p \equiv q) \to (q \equiv p)) \in D.$

Na mocy definicji wartościowania otrzymujemy następującą równość:

$$v((p \equiv q) \to (q \equiv p)) = (v(p) \tilde{\equiv} v(q)) \tilde{\to} (v(q) \tilde{\equiv} v(p)).$$

Korzystając z warunków semantycznych nałożonych na SCI-modele, dostajemy:

$$\begin{aligned} & v((p \equiv q) \to (q \equiv p)) \in D \\ \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad & (v(p) \tilde{\equiv} v(q)) \tilde{\to} (v(q) \tilde{\equiv} v(p)) \in D \\ \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad & \text{jeśli } (v(p) \tilde{\equiv} v(q)) \in D, \text{ to } (v(q) \tilde{\equiv} v(p)) \in D \\ \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad & \text{jeśli } v(p) = v(q), \text{ to } v(q) = v(p). \end{aligned}$$

Ze względu na to, że ostatnie zdanie w powyższym ciągu równoważności jest prawdziwe na mocy symetrii równości, w dowolnym modelu $\mathcal{M}$ i dla dowolnego wartościowania v w $\mathcal{M}$ zachodzi $v((p \equiv q) \to (q \equiv p)) \in D$, co oznacza, że formuła $(p \equiv q) \to (q \equiv p)$ jest tautologią SCI, a zatem jest dowodliwa w SCI. Dowód semantyczny czyni więc istotny użytek z faktu, że identyczność formuł wyraża równość denotacji tych formuł, a relacja równości jest symetryczna.

Dedukcyjne systemy tablicowe zazwyczaj wykorzystują w swojej konstrukcji semantyczną charakterystykę danej logiki, a dowody formuł przeprowadzane w takich systemach *naśladują* sposoby rozumowań przeprowadzanych w semantyce. W kolejnej sekcji przedstawiamy system tablicowy T^*_{SCI}, którego konstrukcja motywowana jest semantyką SCI. Na przykładach pokażemy działanie systemu, a następnie dowód jego poprawności i pełności.

2 System tablicowy T^*_{SCI}

Systemy tablicowe wyznaczone są zazwyczaj przez zbiór reguł inferencji i aksjomaty. Aksjomatami są wyróżnione zbiory formuł. Reguły mają następującą postać:

$$(\neg)\ \frac{\Phi \cup \{\neg\neg\varphi\}}{\Phi \cup \{\varphi\}} \qquad (\to)\ \frac{\Phi \cup \{\varphi \to \psi\}}{\Phi \cup \{\neg\varphi\} \mid \Phi \cup \{\psi\}} \qquad (\neg\to)\ \frac{\Phi \cup \{\neg(\varphi \to \psi)\}}{\Phi \cup \{\varphi, \neg\psi\}}$$

$$(\mathsf{sym})\ \frac{\Phi \cup \{\varphi(\psi \equiv \vartheta)\}}{\Phi \cup \{\varphi(\vartheta \equiv \psi\}}\ \text{o ile } \psi > \vartheta$$

$$(\mathsf{fun})\ \frac{\Phi \cup \Phi(\varphi) \cup \{p \equiv \varphi\}}{\Phi \cup \Phi(\varphi/p) \cup \{p \equiv \varphi\}}\ \text{o ile } p < \varphi$$

$$(\not\equiv_1)\ \frac{\Phi \cup \{p \not\equiv \psi\}}{\Phi \cup \{p \not\equiv \alpha, \alpha \equiv \psi\}} \qquad (\not\equiv_2)\ \frac{\Phi \cup \{\varphi \not\equiv \psi\}}{\Phi \cup \{\alpha \equiv \varphi, \beta \equiv \psi, \alpha \not\equiv \beta\}}$$

$$(\equiv_\neg)\ \frac{\Phi \cup \{p \equiv \neg\psi\}}{\Phi \cup \{p \equiv \neg\alpha, \alpha \equiv \psi\}} \qquad (\equiv_\to)\ \frac{\Phi \cup \{p \equiv (\varphi \to \psi)\}}{\Phi \cup \{p \equiv (\alpha \to \beta), \alpha \equiv \varphi, \beta \equiv \psi\}}$$

$$(\equiv^{\mathrm{l}}_\to)\ \frac{\Phi \cup \{p \equiv (q \to \psi)\}}{\Phi \cup \{p \equiv (q \to \alpha), \alpha \equiv \psi\}} \qquad (\equiv^{\mathrm{r}}_\to)\ \frac{\Phi \cup \{p \equiv (\varphi \to q)\}}{\Phi \cup \{p \equiv (\alpha \to q), \alpha \equiv \varphi\}}$$

$$(\equiv^{\mathrm{l}}_\equiv)\ \frac{\Phi \cup \{p \equiv (q \equiv \psi)\}}{\Phi \cup \{p \equiv (q \equiv \alpha), \alpha \equiv \psi\}} \qquad (\equiv^{\mathrm{r}}_\equiv)\ \frac{\Phi \cup \{p \equiv (\varphi \equiv q)\}}{\Phi \cup \{p \equiv (\alpha \equiv q), \alpha \equiv \varphi\}}$$

$$(\equiv_\equiv)\ \frac{\Phi \cup \{p \equiv (\varphi \equiv \psi)\}}{\Phi \cup \{p \equiv (\alpha \equiv \beta), \alpha \equiv \varphi, \beta \equiv \psi\}} \qquad (\equiv)\ \frac{\Phi \cup \{\varphi \equiv \psi\}}{\Phi \cup \{\alpha \equiv \beta, \alpha \equiv \varphi, \beta \equiv \psi\}}$$

Ograniczenie w regułach $(\not\equiv_1)$, $(\not\equiv_2)$, $(\equiv_\neg)$, $(\equiv_\to)$, $(\equiv^{\mathrm{l}}_\to)$, $(\equiv^{\mathrm{r}}_\to)$, $(\equiv^{\mathrm{l}}_\equiv)$, $(\equiv^{\mathrm{r}}_\equiv)$, $(\equiv_\equiv)$, $(\equiv)$: wyróżniona formuła reguły nie jest prosta.

Tablica 1: Reguły systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$.

$$(\mathsf{reg})\ \frac{\Phi}{\Phi_1 \mid \ldots \mid \Phi_n}, n \geqslant 1,$$

gdzie Φ, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ są skończonymi zbiorami formuł. Zbiór Φ nazywamy *przesłanką*, zaś $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ *konkluzjami* reguły (reg). Reguły powinny zachowywać spełnialność zbiorów formuł, do których są stosowane. A zatem przecinek występujący w regule (reg) można interpretować jako meta-koniunkcję, zaś rozgałęzienie, oznaczane symbolem „|", jako meta-alternatywę.

System tablicowy $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ składa się z reguł i aksjomatów przedstawionych odpowiednio w Tabelach 1, 2 i Tabeli 3. Dowody w systemie $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ mają postać drzew złożonych z gałęzi, w których występują wierzchołki utożsamiane ze zbiorami formuł. Drzewem dekompozycji dla formuły φ w systemie $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ (lub krócej: $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewem dla φ) nazywamy drzewo spełniające następujące warunki:

$$(\equiv_\top)\quad \frac{\Phi \cup \{p \equiv q\}}{\Phi \cup \{p, q, p \equiv q\} \mid \Phi \cup \{\neg p, \neg q, p \equiv q\}}$$

$$(\equiv_\top^{\neg})\quad \frac{\Phi \cup \{p \equiv \neg q\}}{\Phi \cup \{p, \neg q, p \equiv \neg q\} \mid \Phi \cup \{\neg p, q, p \equiv \neg q\}}$$

$$(\equiv_\top^{\rightarrow})\quad \frac{\Phi \cup \{p \equiv (q \to r)\}}{\Phi \cup \{p, \neg q, \theta\} \mid \Phi \cup \{p, r, \theta\} \mid \Phi \cup \{\neg p, q, \neg r, \theta\}},$$
gdzie $\theta = (p \equiv (q \to r))$

$$(\equiv_\top^{\equiv})\quad \frac{\Phi \cup \{p \equiv (q \equiv r)\}}{\Phi \cup \Phi_1 \mid \Phi \cup \Phi_2 \mid \Phi \cup \Phi_3 \mid \Phi \cup \Phi_4 \mid \Phi \cup \Phi_5 \mid \Phi \cup \Phi_6}, \text{ gdzie:}$$

$\Phi_1 = \{p, q, r, q \equiv r, p \equiv (q \equiv r)\}$
$\Phi_2 = \{p, \neg q, \neg r, q \equiv r, p \equiv (q \equiv r)\}$
$\Phi_3 = \{\neg p, q, r, q \not\equiv r, p \equiv (q \equiv r)\}$
$\Phi_4 = \{\neg p, q, \neg r, q \not\equiv r, p \equiv (q \equiv r)\}$
$\Phi_5 = \{\neg p, \neg q, r, q \not\equiv r, p \equiv (q \equiv r)\}$
$\Phi_6 = \{\neg p, \neg q, \neg r, q \not\equiv r, p \equiv (q \equiv r)\}$

$$(\equiv_\bot)\quad \frac{\Phi \cup \{p \not\equiv q\}}{\Phi \cup \{p, q, \theta\} \mid \Phi \cup \{p, \neg q, \theta\} \mid \Phi \cup \{\neg p, q, \theta\} \mid \Phi \cup \{\neg p, \neg q, \theta\}},$$
gdzie $\theta = (p \not\equiv q)$

Ograniczenia: przesłanki reguł $(\equiv_\top)$, $(\equiv_\top^{\neg})$, $(\equiv_\top^{\rightarrow})$, $(\equiv_\top^{\equiv})$, $(\equiv_\bot)$ są zbiorami prostych formuł.

Tablica 2: Reguły systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$.

1. Korzeń drzewa to zbiór $\{\neg\varphi\}$.
2. Każdy wierzchołek, z wyjątkiem korzenia, powstaje przez zastosowanie do jego poprzednika jednej z reguł systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$.
3. Wierzchołek nie ma następnika, gdy jest zbiorem aksjomatycznym lub nie stosuje się do niego żadna z reguł systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$. Wierzchołek bez następnika nazywamy *liściem*.

Reguły $(\neg)$, $(\to)$, $(\neg\to)$ nazywamy *regułami dekompozycji*, zaś (sym) i (fun) *regułami redukcji*. Z kolei reguły $(\not\equiv_1)$, $(\not\equiv_2)$, $(\equiv_\neg)$, $(\equiv^{\mathsf{l}}_\to)$, $(\equiv^{\mathsf{r}}_\to)$, $(\equiv_\to)$, $(\equiv^{\mathsf{l}}_\equiv)$, $(\equiv^{\mathsf{r}}_\equiv)$, $(\equiv_\equiv)$, $(\equiv)$, $(\equiv_\top)$, $(\equiv_\top^{\neg})$, $(\equiv_\top^{\rightarrow})$, $(\equiv_\top^{\equiv})$, $(\equiv_\bot)$ nazywamy *regułami dla identyczności*. Litery α i β, występujące w regułach $(\not\equiv_1)$, $(\not\equiv_2)$, $(\equiv)$, $(\equiv_\neg)$, $(\equiv^{\mathsf{l}}_\to)$, $(\equiv^{\mathsf{r}}_\to)$, $(\equiv_\to)$, $(\equiv^{\mathsf{l}}_\equiv)$, $(\equiv^{\mathsf{r}}_\equiv)$, $(\equiv_\equiv)$, reprezentują *nowe zmienne zdaniowe*, to znaczy takie, które nie występują w żadnym poprzedniku wierzchołka, do którego stosowana jest reguła

Zbiory aksjomatyczne:

$(\mathsf{Ax}_1)\quad \Phi \cup \{\varphi \not\equiv \varphi\}$ $\qquad$ $(\mathsf{Ax}_2)\quad \Phi \cup \{\varphi, \neg\varphi\}$

gdzie φ jest SCI-formułą, zaś Φ jest dowolnym skończonym zbiorem SCI-formuł.

Tablica 3: Aksjomaty systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$

wprowadzająca zmienną. W regule (fun) wyrażenie $\Phi(\varphi)$ oznacza zbiór (być może pusty) złożony wyłącznie z takich formuł, które zawierają co najmniej jedno wystąpienie φ, zaś Φ oznacza zbiór (być może pusty) złożony wyłącznie z takich formuł, w których φ nie jest podformułą.

We wszystkich regułach systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ przesłanki mają postać $\Phi \cup \{\varphi^*\}$, gdzie Φ reprezentuje skończony (być może pusty) zbiór SCI-formuł (na który to zbiór mogą być nakładane pewne dodatkowe warunki), zaś φ^*, nazywana *formułą wyróżnioną danej reguły*, jest SCI-schematem, determinującym stosowalność danej reguły i postać jej konkluzji. Regułę z przesłanką $\Phi \cup \{\varphi^*\}$ *można zastosować* do zbioru $X \cup \{\varphi\}$ pod warunkiem, że φ jest najmniejszą (w sensie wprowadzonego wcześniej porządku $<$) formułą w zbiorze $X \cup \{\varphi\}$, φ jest instancją schematu φ^* oraz w wyniku zastosowania reguły co najmniej jedna z konkluzji zawiera formułę, która nie występuje w $X \cup \{\varphi\}$, z zastrzeżeniem, że:

- regułę (fun) można zastosować do danego zbioru pod warunkiem, że wynik jej zastosowania nie jest kopią tego zbioru,
- dla danej formuły φ reguły $(\equiv_\top)$, $(\equiv^{\neg}_\top)$, $(\equiv^{\rightarrow}_\top)$, $(\equiv^{\equiv}_\top)$, $(\equiv_\bot)$ można zastosować do zbioru $X \cup \{\varphi\}$ co najwyżej jeden raz,
- reguły stosowane są w następującym porządku: $(\neg)$, $(\neg\,\rightarrow)$, $(\rightarrow)$, (sym), (fun), $(\not\equiv_1)$, $(\not\equiv_2)$, $(\equiv_\neg)$, $(\equiv^{\mathrm{l}}_\rightarrow)$, $(\equiv^{\mathrm{r}}_\rightarrow)$, $(\equiv_\rightarrow)$, $(\equiv^{\mathrm{l}}_\equiv)$, $(\equiv^{\mathrm{r}}_\equiv)$, $(\equiv_\equiv)$, $(\equiv)$, $(\equiv_\top)$, $(\equiv^{\neg}_\top)$, $(\equiv^{\rightarrow}_\top)$, $(\equiv^{\equiv}_\top)$, $(\equiv_\bot)$.

Gałąź $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa nazywamy *domkniętą*, gdy zawiera zbiór aksjomatyczny. Gałąź, która nie jest domknięta, nazywamy *otwartą*. $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewo jest domknięte, gdy wszystkie jego gałęzie są domknięte. Formuła φ jest *dowodliwa* w systemie $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$, gdy istnieje domknięte $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewo dla φ. Domknięte $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewo dla φ nazywamy *dowodem* φ *w systemie* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ (inaczej: $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$*-dowodem dla* φ).

Warto zwrócić uwagę na kilka ważnych cech systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$. Oczywiście, jak w tradycyjnych systemach tablicowych, konstrukcję drzewa dekompo-

zycji dla φ zaczynamy od formuły $\neg\varphi$. W pierwszej kolejności stosujemy reguły dekompozycji, a następnie reguły (sym) i (fun), o ile jest to możliwe. Reguła (sym), kodująca symetrię identyczności, gwarantuje nam, że wszystkie identyczności, które występują w $\neg\varphi$, stają się identycznościami, w których lewa strona identyczności jest niewiększa (w sensie relacji $<$) od prawej. Z kolei reguła (fun) pozwala nam zastąpić każdą formułę ψ zmienną zdaniową p, o ile $p \equiv \psi$ pojawiło się w wierzchołku. Jednym z zadań reguły (fun) jest więc redukcja złożoności formuł występujących w drzewie. Z perspektywy semantycznej reguła (fun) koduje własność funkcyjności operacji $\tilde{=}$ w SCI-modelach. Jeśli w wyniku zastosowania reguł dekompozycji oraz reguł (sym) i (fun), drzewo dla φ nie jest domknięte, to jego wierzchołki zawierają wyłącznie zmienne zdaniowe, negacje zmiennych, identyczności lub ich negacje. Jeśli wierzchołek zawiera identyczności, które nie są prostymi SCI-formułami, stosujemy reguły $(\not\equiv_1)$, $(\not\equiv_2)$, $(\equiv_\neg)$, $(\equiv^{\mathrm{l}}_{\to})$, $(\equiv^{\mathrm{r}}_{\to})$, $(\equiv_\to)$, $(\equiv^{\mathrm{l}}_{\equiv})$, $(\equiv^{\mathrm{r}}_{\equiv})$, $(\equiv_\equiv)$ oraz $(\equiv)$, które przekształcają wszystkie identyczności i ich negacje do zbioru prostych SCI-formuł. Nowe zmienne zdaniowe, wprowadzane do drzewa przez te reguły, pełnią funkcję denotacji formuł występujących po lewej lub prawej stronie rozkładanej identyczności lub negacji identyczności. Zauważmy, że liczba zastosowań każdej z tych reguł w danej gałęzi $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa nie może być większa niż liczba podformuł $\neg\varphi$. A zatem $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewo zawiera skończenie wiele zmiennych zdaniowych. Jeśli w wyniku takiej konstrukcji dojdziemy do wierzchołka, który nie jest domknięty, a jest zbiorem wyłącznie prostych SCI-formuł, wówczas, o ile to możliwe, stosujemy reguły $(\equiv_\top)$, $(\equiv^{\neg}_{\top})$, $(\equiv^{\to}_{\top})$, $(\equiv^{\equiv}_{\top})$, $(\equiv_\bot)$, po zastosowaniu których może być konieczne ponowne zastosowanie reguł (sym) lub (fun), o ile reguły te nie generują kopii zbiorów. Zauważmy, że zastosowanie jednej z reguł $(\equiv_\top)$, $(\equiv^{\neg}_{\top})$, $(\equiv^{\to}_{\top})$, $(\equiv^{\equiv}_{\top})$, $(\equiv_\bot)$ do zbioru $X \cup \{\varphi\}$ generuje następnik X', który zawiera formułę φ. Jednak ponowne zastosowanie tej reguły do X' z wyróżnioną formułą φ jest zablokowane odpowiednim warunkiem stosowalności reguł. Ze względu na to, że w $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewie występuje skończenie wiele różnych zmiennych zdaniowych, a wyjściowa formuła $\neg\varphi$ ma skończenie wiele podformuł, liczba możliwych podstawień i ich kombinacji jest również skończona, to znaczy domknięcie skończonego zbioru formuł na regułę (fun) zwraca skończoną rodzinę skończonych zbiorów. A zatem jeśli reguła (fun) stosuje się do wierzchołka X', to musi istnieć taki jego następnik, że ewentualne zastosowanie do niego reguły (fun) zwróci

zbiór będący kopią X'. Ze względu na to, że reguła (fun) nie stosuje się do wierzchołka, gdy jej potencjalne zastosowanie generuje kopię, liczba możliwych zastosowań reguły (fun) jest również skończona. Opisane powyżej własności reguł systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ gwarantują, że każde drzewo jest skończone. Mamy więc:

Twierdzenie 2. *Niech* φ *będzie* SCI*-formułą. Każde* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$*-drzewo dla* φ *jest skończone.*

Końcowe wierzchołki w gałęziach $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzew nazywamy liśćmi. Na mocy definicji $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa każdy liść jest skończonym zbiorem formuł, do którego nie stosuje się żadna z reguł systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$.

Działanie systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ zilustrujemy kilkoma przykładami. W Tabeli 4 przedstawiony jest $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-dowód formuły $(p \equiv q) \to (q \equiv p)$, zaś w Tabeli 6 $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-dowód $(p \equiv \neg q) \to ((q \equiv \neg r) \to (p \equiv \neg\neg r))$. Przykład otwartego $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa – dla formuły $p \not\equiv q$, która nie jest tautologią SCI – zawiera Tabela 5. Zakładamy, że zmienne zdaniowe użyte w tych przykładach uporządkowane są następująco: $p < q < r < s$. Dla prostoty w wierzchołkach drzew zamiast zbiorów formuł użyte zostały ciągi formuł, a formuły wyróżnione zostały podkreślone.

$$\dfrac{\dfrac{\underline{\neg((p \equiv q) \to (q \equiv p))}\ (\neg\to)}{\underline{p \equiv q}, \underline{q \not\equiv p}\ (\mathsf{sym})}}{p \equiv q, p \not\equiv q}$$
domknięte

Tablica 4: $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-dowód formuły $(p \equiv q) \to (q \equiv p)$.

$$\dfrac{\dfrac{\underline{\neg(p \not\equiv q)}\ (\neg)}{\underline{p \equiv q}\ (\equiv_\top)}}{\begin{array}{ll} p, q, p \equiv q & \neg p, \neg q, p \equiv q \\ \text{otwarty liść } \mathsf{X}_1 & \text{otwarty liść } \mathsf{X}_2 \end{array}}$$

Tablica 5: Otwarte $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewo dla formuły $\neg(p \equiv q)$.

$$\neg[(p \equiv \neg q) \to ((q \equiv \neg r) \to (p \equiv \neg\neg r))] \quad (\neg\to)$$
$$\big|$$
$$p \equiv \neg q, \neg((q \equiv \neg r) \to (p \equiv \neg\neg r)) \quad (\neg\to)$$
$$\big|$$
$$p \equiv \neg q, \underline{q \equiv \neg r, p \not\equiv \neg\neg r} \quad (\mathsf{fun})$$
$$\big|$$
$$p \equiv \neg q, q \equiv \neg r, p \not\equiv \neg q$$
$$\text{domknięte}$$

Tablica 6: $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-dowód formuły $(p \equiv \neg q) \to ((q \equiv \neg r) \to (p \equiv \neg\neg r))$.

Zauważmy, że w dowodzie formuły $(p \equiv q) \to (q \equiv p)$ z Tabeli 4 kluczową regułą jest (sym), czyli reguła wyrażająca symetrię operacji $\tilde{\equiv}$ w SCI-modelach. Dowód z Tabeli 6 w sposób istotny wykorzystuje regułę (fun), która dokonuje odpowiedniego podstawienia zmiennej q w miejsce $\neg r$. Z kolei w Tabeli 5 mamy przykład drzewa dla formuły $p \not\equiv q$, której negacja jest spełnialna. Semantyczny dowód spełnialności formuły $p \equiv q$ polegałby na konstrukcji SCI-modelu $\mathcal{M}$ i takiego wartościowania ν, dla których zachodzi $\mathcal{M}, \nu \models p \equiv q$. Oczywiście, wystarczy do tego dwuelementowy SCI-model i wartościowanie ν, które zrównuje wartości p i q w tym modelu. Mamy przy tym dwie możliwości. Wartość $\nu(p)$ może być elementem wyróżnionym ze zbioru D lub elementem spoza D. Dwie gałęzie drzewa w Tabeli 5 reprezentują właśnie te dwie możliwości.

Przeprowadźmy jeszcze krótką analizę reguł wykorzystanych w tym drzewie. Otóż pierwszy krok, czyli konstrukcja wierzchołka $X = \{p \equiv q\}$, będącego bezpośrednim następnikiem korzenia, nie budzi wątpliwości. Wówczas jedyną regułą, która stosuje się do zbioru X, jest właśnie $(\equiv_\top)$. Reguła ta generuje dwa wierzchołki $X_1 = \{p, q, p \equiv q\}$ oraz $X_2 = \{\neg p, \neg q, p \equiv q\}$. Dlaczego do zbiorów tych nie stosuje się już żadna z reguł $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-systemu, to znaczy zbiory te są końcowymi wierzchołkami drzewa? Rozważmy zbiór X_1. Ze względu na postać formuł, które występują w tym zbiorze, do X_1 potencjalnie stosują się reguły $(\equiv_\top)$, (sym), (fun). Jednak do X_1 nie możemy zastosować reguły $(\equiv_\top)$, bo wyróżnioną formułą takiego zastosowania byłaby formuła $p \equiv q$, a dokładnie do tej formuły zastosowaliśmy regułę $(\equiv_\top)$ krok wcześniej. Do X_1 nie możemy również zastosować (sym), bo $p < q$. I w końcu, nie możemy zastosować do X_1 reguły (fun), gdyż jej ewentualne zastosowanie – polegające na podstawieniu zmiennej p w miejsce q we wszystkich jej wystąpieniach z wyjątkiem $p \equiv q$ – wygenerowałoby wierzchołek

zawierający formuły p oraz $p \equiv q$, a formuły te należą do X_1, więc ten potencjalny bezpośredni następnik X_1 byłby kopią X_1. Analogicznie można uzasadnić, że X_2 jest liściem.

Zanim przejdziemy do kolejnej sekcji, w której przedstawimy ideę dowodu poprawności i pełności systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$, omówimy jeszcze jeden przykład, a mianowicie fragment pewnego $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa z Tabeli 7. Otóż załóżmy, że w naszym $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewie pojawia się wierzchołek W_1 zawierający następujące proste SCI-formuły: p, $p \equiv \neg r$, $q \equiv \neg s$, $p \equiv (q \equiv p)$, $p \equiv (s \equiv r)$. Ponieważ $p < q < r < s$ w pierwszej kolejności musimy zastosować regułę (sym) (dwukrotnie) do formuł $p \equiv (q \equiv p)$ i $p \equiv (s \equiv r)$. W ten sposób uzyskamy wierzchołek W_2, będący bez-

Tablica 7: Działanie $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-reguł na zbiorze prostych SCI-formuł – przykład gałęzi.

$$
\begin{array}{c}
(W_1)\quad p, p \equiv \neg r, q \equiv \neg s, \underline{p \equiv (q \equiv p), p \equiv (s \equiv r)}\ {\scriptstyle (\mathsf{sym})\times 2} \\
\vert \\
(W_2)\quad p, \underline{p \equiv \neg r}, q \equiv \neg s, p \equiv (p \equiv q), p \equiv (r \equiv s)\ {\scriptstyle (\equiv^{\neg}_{\top})} \\
\vert \\
(W_3)\quad p, \neg r, p \equiv \neg r, \underline{q \equiv \neg s}, p \equiv (p \equiv q), p \equiv (r \equiv s)\ {\scriptstyle (\equiv^{\neg}_{\top})} \\
\vert \\
(W_4)\quad p, q, \neg r, \neg s, p \equiv \neg r, q \equiv \neg s, \underline{p \equiv (p \equiv q)}, p \equiv (r \equiv s)\ {\scriptstyle (\equiv^{\equiv}_{\top})} \\
\vert \\
(W_5)\quad p, q, \neg r, \neg s, \underline{p \equiv q}, p \equiv \neg r, q \equiv \neg s, p \equiv (p \equiv q), p \equiv (r \equiv s)\ {\scriptstyle (\mathsf{fun})} \\
\vert \\
(W_6)\quad p, \neg r, \neg s, \underline{p \equiv q}, p \equiv \neg r, p \equiv \neg s, p \equiv (p \equiv p), p \equiv (r \equiv s)\ {\scriptstyle (\equiv_{\top})} \\
\vert \\
(W_7)\quad p, q, \neg r, \neg s, p \equiv q, p \equiv \neg r, \underline{p \equiv \neg s}, p \equiv (p \equiv p), p \equiv (r \equiv s)\ {\scriptstyle (\equiv^{\neg}_{\top})} \\
\vert \\
(W_8)\quad p, q, \neg r, \neg s, p \equiv q, p \equiv \neg r, p \equiv \neg s, \underline{p \equiv (p \equiv p)}, p \equiv (r \equiv s)\ {\scriptstyle (\equiv^{\equiv}_{\top})} \\
\vert \\
(W_9)\quad p, q, \neg r, \neg s, p \equiv p, p \equiv q, p \equiv \neg r, p \equiv \neg s, p \equiv (p \equiv p), \\
\underline{p \equiv (r \equiv s)}\ {\scriptstyle (\equiv^{\equiv}_{\top})} \\
\vert \\
(W_{10})\quad p, q, \neg r, \neg s, p \equiv p, p \equiv q, \underline{r \equiv s}, p \equiv \neg r, p \equiv \neg s, \\
p \equiv (p \equiv p), p \equiv (r \equiv s)\ {\scriptstyle (\mathsf{fun})} \\
\vert \\
(W_{11})\quad p, q, \neg r, p \equiv p, p \equiv q, \underline{r \equiv s}, p \equiv \neg r, \underline{p \equiv (p \equiv p)}, \\
\underline{p \equiv (r \equiv r)}\ {\scriptstyle (\equiv_{\top})+(\equiv^{\equiv}_{\top})+(\equiv_{\top})} \\
\vert \\
(W_{12}+W_{13}+W_{14})\quad p, q, \neg r, \neg s, p \equiv p, p \equiv q, r \equiv r, r \equiv s, p \equiv \neg r, \\
p \equiv (p \equiv p), p \equiv (r \equiv r) \\
\text{otwarty liść}
\end{array}
$$

pośrednim następnikiem W_1. Reguła (fun) nie stosuje się do W_2, gdyż żadna z formuł, które występują po prawej stronie identyczności, nie jest podformułą pozostałych. A zatem możemy jedynie zastosować reguły dekomponujące identyczność. Stosujemy więc regułę do najmniejszej w tym zbiorze identyczności, a mianowicie do $p \equiv \neg r$. Drzewo się wówczas rozgałęzia, a w jednej z tych gałęzi bezpośrednim następnikiem W_2 jest W_3. Teraz zastosowanie reguły $(\equiv^{\neg}_{\top})$ do formuły $p \equiv \neg r$ jest zablokowane. Zauważmy też, że reguła (fun) nie może być zastosowana do formuł $\neg r, p \equiv \neg r$, gdyż jej potencjalne użycie zastępuje formułę $\neg r$ zmienną p, a zatem uzyskany w ten sposób wierzchołek byłby kopią W_3. Stosujemy więc regułę $(\equiv^{\neg}_{\top})$ do formuły $q \equiv \neg s$. Drzewo się wówczas rozgałęzia, a w jednej z tych gałęzi bezpośrednim następnikiem W_3 jest wierzchołek W_4. Oczywiście ani do $p \equiv \neg r$, ani do $q \equiv \neg s$ nie możemy już zastosować reguły $(\equiv^{\neg}_{\top})$. Do W_4 nadal nie możemy zastosować reguły (fun), w szczególności do $\neg s, q \equiv \neg s$, gdyż w rezultacie takiego zastosowania otrzymalibyśmy kopię W_4. Stosujemy więc regułę $(\equiv^{\equiv}_{\top})$ do $p \equiv (p \equiv q)$, a w jednej z powstałych w ten sposób gałęzi bezpośrednim następnikiem W_4 jest wierzchołek W_5, w którym pojawia się formuła $p \equiv q$. Tym razem możemy zastosować regułę (fun) do $W_5 \ni p \equiv q$, gdyż w wyniku jej zastosowania eliminujemy z W_5 między innymi q, a dodatkowo otrzymujemy formuły $p \equiv \neg s$ i $p \equiv (p \equiv p)$, które nie występowały w W_5. Dostajemy w ten sposób wierzchołek W_6, do którego reguła (fun) się nie stosuje, gdyż jej ewentualne zastosowanie generuje kopię W_6. Stosujemy więc regułę $(\equiv_{\top})$ do formuły $p \equiv q$ i w jednej z powstałych w ten sposób gałęzi mamy wierzchołek W_7, w którym ponownie pojawia się q. Jednak tym razem ponowne zastosowanie reguły (fun) jest już zablokowane. W kolejnym kroku stosujemy więc regułę $(\equiv^{\neg}_{\top})$ do $p \equiv \neg s$, co rozgałęzia drzewo, a w jednej z tak uzyskanych gałęzi jest wierzchołek W_8 tożsamy z wierzchołkiem W_7. Do wierzchołka stosuje się wówczas reguła $(\equiv^{\equiv}_{\top})$, co prowadzi do wierzchołka W_9, który jest bezpośrednim następnikiem W_8 w jednej z powstałych gałęzi. Zyskujemy nową formułę $p \equiv p$. Do zbioru W_9 nie stosuje się reguła (fun); inaczej uzyskalibyśmy kopię W_9. W tym momencie powinniśmy zastosować regułę $(\equiv_{\top})$ do formuły $p \equiv p$, ale jej zastosowanie generuje dwie gałęzie: w jednej bezpośrednim następnikiem W_9 będzie zbiór równy W_9, w drugiej zaś gałęzi uzyskamy wierzchołek z formułami $p, \neg p$, a zatem zbiór aksjomatyczny, który zamyka gałąź. Pomijamy więc ten krok w prezentacji drzewa, a następnie stosujemy do W_9

regułę $(\equiv^{\equiv}_{\top})$ (formułą wyróżnioną jest $p \equiv (r \equiv s)$) i w jednej z gałęzi bezpośrednim następnikiem W_9 jest wierzchołek W_{10}. Zastosowanie reguły (fun) do W_{10} generuje wierzchołek $W_{11} \neq W_{10}$. Dalsze zastosowanie reguły $(\equiv_{\top})$ do $r \equiv s$ oraz reguły $(\equiv^{\equiv}_{\top})$ do $p \equiv (p \equiv p)$, a następnie $(\equiv_{\top})$ do $r \equiv r$ daje kolejno wierzchołki $W_{12} = W_{13} = W_{14}$. Ostatni wierzchołek jest otwarty.

Przykład ten pokazuje, że ograniczenia, które nałożyliśmy na reguły systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$, są istotne, by system generował drzewa skończone. Przykład ten dobrze też ilustruje, że w przypadku spełnialnego zbioru formuł reguły systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ generują niezbędne, ale i wystarczające informacje o denotacjach będących interpretacjami formuł z rozważanego zbioru i równościach między tymi denotacjami. Informacje te zawiera końcowy wierzchołek w drzewie z Tabeli 7. A zatem, by wykazać spełnialność zbioru formuł z wierzchołka W_1, wystarczy wziąć co najmniej dwuelementowy SCI-model, w którym operacje odpowiadające spójnikom $\neg$ i $\equiv$ spełniają warunki:

$$\tilde{\neg}a = \begin{cases} 1, \text{ gdy } a \notin D \\ 0, \text{ gdy } a \in D, \end{cases}$$

$$a \tilde{\equiv} b = \begin{cases} 1, \text{ gdy } a = b \\ 0, \text{ w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

gdzie $0, 1 \in U$, $1 \in D$ oraz $0 \notin D$, a następnie określić wartościowanie ν następująco:

$$\nu(p) = \nu(q) = 1 \text{ oraz } \nu(r) = \nu(s) = 0.$$

To zaś oznacza, że system $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ nie tylko pozwala weryfikować tautologiczność SCI-formuł, ale również generuje zasoby niezbędne do konstrukcji kontrmodelu formuł, które nie są tautologiami SCI. I w końcu, zauważmy również, że liść otwartej gałęzi $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa, jak w przykładzie z Tabeli 7, ma następujące własności: (1) wszystkie formuły są prostymi SCI-formułami; (2) we wszystkich identycznościach lewa strona jest mniejsza (w sensie relacji $<$) od prawej; (3) jeśli q jest zmienną zdaniową, która w liściu jest podformułą identyczności o postaci $\alpha \equiv \beta$, $\alpha \equiv \neg\beta$, $\alpha \equiv (\beta \equiv p)$, dla pewnych zmiennych zdaniowych α, β, p, to albo q albo $\neg q$ należy do liścia; (4) zwrotne, symetryczne i przechodnie domknięcie identyczności występujących w liściu jest niesprzeczne i reprezentuje relację równoważności. Wykorzystamy te obserwacje w dowodzie pełności systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$.

3 Poprawność i pełność systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$

W części tej przedstawimy ideę dowodu twierdzenia o poprawności i pełności systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$. Wykorzystamy dość standardowe metody, ale warto już teraz zwrócić uwagę na ważną cechę $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-reguł, która odróżnia $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-system od wielu innych systemów tablicowych dla logik nieklasycznych. Otóż reguły $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ są poprawne w silnym sensie, a mianowicie przesłanka reguły jest zbiorem spełnialnym wtedy i tylko wtedy, gdy meta-alternatywa jej konkluzji jest spełnialna. Własność ta oznacza, że reguły są odwracalne. Skorzystamy z tej własności w dowodzie pełności. Wykażemy bowiem, że liść otwartej gałęzi $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa jest spełnialny, to znaczy, skonstruujemy SCI-model i wartościowanie spełniające wszystkie formuły z liścia, co ze względu na silną poprawność reguł będzie implikować spełnialność wyjściowej formuły $\neg\varphi$. W ten sposób wykażemy, że jeśli nie istnieje domknięte $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewo dla formuły φ, to $\neg\varphi$ jest spełnialna, a zatem samo φ nie jest SCI-tautologią.

3.1 Poprawność

Regułę

$$\frac{\Phi}{\Phi_1 \mid \ldots \mid \Phi_n} \text{ dla } n \geqslant 1$$

nazywamy *silnie poprawną* w SCI, gdy spełniony jest następujący warunek: Φ jest SCI-spełnialny wtw istnieje $i \leqslant n$ takie, że Φ_i jest SCI-spełnialny.

Lemat 1. *Każda reguła systemu* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ *jest silnie poprawna w* SCI.

Dowód. Dla przykładu wykażemy silną poprawność reguły $(\equiv_{\equiv})$, gdyż w przypadku pozostałych reguł ich poprawność można udowodnić analogicznie lub wykorzystując proste własności SCI-modeli.

Załóżmy, że istnieją SCI-model $\mathcal{M} = (U, D, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv})$ oraz wartościowanie ν w $\mathcal{M}$ takie, że $\mathcal{M}, \nu \models \vartheta$ dla każdej formuły $\vartheta \in \Phi \cup \{p \equiv (\varphi \equiv \psi)\}$. W szczególności więc $\nu(p \equiv (\varphi \equiv \psi)) \in D$, co na mocy warunków semantycznych nałożonych na SCI-modele i wartościowania oznacza, iż $\nu(p) = (\nu(\varphi) \tilde{\equiv} \nu(\psi))$. Niech ν' będzie wartościowaniem

w $\mathcal{M}$ takim, że $\nu'(\alpha) = \nu(\varphi)$, $\nu'(\beta) = \nu(\psi)$ zaś $\nu'(q) = \nu(q)$, dla każdej zmiennej zdaniowej takiej, że $q \neq \alpha$ oraz $q \neq \beta$. Zauważmy, że ν' jest dobrze określonym wartościowaniem, gdyż zmienne α i β nie występują w $\Phi \cup \{p \equiv (\varphi \equiv \psi)\}$, co w szczególności implikuje, że $\nu'(p) = \nu(p)$, $\nu'(\varphi) = \nu(\varphi)$ oraz $\nu'(\psi) = \nu(\psi)$. A zatem $\nu'(\alpha) = \nu'(\varphi)$ oraz $\nu'(\beta) = \nu'(\psi)$, a stąd otrzymujemy, że model $\mathcal{M}$ i wartościowanie ν' spełniają $\alpha \equiv \varphi$ oraz $\beta \equiv \psi$. Co więcej, $\nu'(\alpha) \tilde{=} \nu'(\beta) = \nu'(\varphi) \tilde{=} \nu'(\psi)$, czyli $\nu'(p) = \nu'(\alpha \equiv \beta)$. To zaś oznacza, że każda formuła z $\Phi \cup \{p \equiv (\alpha \equiv \beta), \alpha \equiv \varphi, \beta \equiv \psi\}$ jest spełniona w $\mathcal{M}$ przy wartościowaniu ν'.

Dowód w drugą stronę jest nawet prostszy. Niech $\mathcal{M}$ i ν spełniają $\Phi \cup \{p \equiv (\alpha \equiv \beta), \alpha \equiv \varphi, \beta \equiv \psi\}$. Wtedy $\nu(p) = \nu(\alpha \equiv \beta)$, $\nu(\alpha) = \nu(\varphi)$ oraz $\nu(\beta) = \nu(\psi)$, co oznacza, że $\nu(p) = \nu(\varphi) \tilde{=} \nu(\psi)$, czyli $\nu(p \equiv (\varphi \equiv \psi)) \in D$, a zatem $\mathcal{M}$ i ν spełniają wszystkie formuły ze zbioru $\Phi \cup \{p \equiv (\varphi \equiv \psi)\}$. Pokazaliśmy więc, że reguła $(\equiv_{\equiv})$ jest silnie poprawna w SCI. □

Następujący lemat jest prostym wnioskiem z definicji SCI-modelu:

Lemat 2. *Żaden ze zbiorów aksjomatycznych systemu* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ *nie jest* SCI*-spełnialny.*

Twierdzenie 3 (Poprawność $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$)**.** *System* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ *jest poprawny, to znaczy jeśli istnieje* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$*-dowód formuły* φ*, to* φ *jest* SCI*-tautologią.*

Dowód. Załóżmy, że $\varphi \in \mathsf{FOR}$ jest dowodliwa w $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$. Wtedy istnieje domknięte $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewo dla φ, to znaczy korzeń tego drzewa zawiera $\neg\varphi$, a każda jego gałąź kończy się zbiorem aksjomatycznym. Na mocy Lematu 2, wszystkie zbiory aksjomatyczne systemu $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ są niespełnialne w SCI. Co więcej, z Lematu 1 wynika, że $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-reguły zachowują obustronnie niespełnialność zbiorów, do których są stosowane, to znaczy jeśli wszystkie konkluzje wygenerowane przez regułę są niespełnialne, to niespełnialna w SCI jest przesłanka, do której ta reguła została zastosowana. A zatem w każdym kroku konstrukcji $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa, idąc od jego liści do korzenia, mamy zbiory formuł, które nie są spełnialne w SCI. W konsekwencji również korzeń drzewa zawiera zbiór niespełnialny, a stąd $\{\neg\varphi\}$ nie jest zbiorem spełnialnym w SCI, czyli φ jest SCI-tautologią. □

3.2 Pełność

W pierwszej kolejności zdefiniujemy szereg pojęć użytecznych w dowodzie pełności. Punktem wyjścia będzie zbiór $\mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ wszystkich podformuł formuł należących do liścia X otwartej gałęzi $\mathsf{T}^{*}_{\mathsf{SCI}}$-drzewa oraz generowany przez $\mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ zbiór identyczności ID^{X}, wskazujący, które z formuł w $\mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ mają identyczne denotacje. Następnie dowodzimy szereg własności X, $\mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ i ID^{X}, a w końcu, korzystając z zasobów $\mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ i relacji równoważności określonej na zbiorze formuł, konstruujemy model i wartościowanie spełniające wszystkie formuły X.

Niech X będzie liściem otwartej gałęzi $\mathsf{T}^{*}_{\mathsf{SCI}}$-drzewa. Definiujemy:

$$\mathsf{FOR}^{\mathsf{X}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\psi : \psi \in \mathsf{Sub}(\mathsf{X})\}.$$

Reguły systemu $\mathsf{T}^{*}_{\mathsf{SCI}}$ gwarantują następujące własności:

Lemat 3. *Niech* X *będzie liściem otwartej gałęzi* $\mathsf{T}^{*}_{\mathsf{SCI}}$*-drzewa. Wtedy:*

($\mathsf{X}1$) X *jest zbiorem prostych* SCI*-formuł.*

($\mathsf{X}2$) *Jeśli* $\varphi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$*, to* φ *jest prostą* SCI*-formułą lub ma postać* $p \to q$*, dla pewnych zmiennych zdaniowych* p, q.

($\mathsf{X}3$) *Jeśli* $\varphi \equiv \psi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$*, to* $\varphi \leqslant \psi$.

($\mathsf{X}4$) *Jeśli* $\varphi \not\equiv \psi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$*, to* $\varphi < \psi$.

($\mathsf{X}5$) *Jeśli* $p \equiv q \in \mathsf{X}$*, to* $p, q \in \mathsf{X}$ *lub* $\neg p, \neg q \in \mathsf{X}$.

($\mathsf{X}6$) *Jeśli* $p \equiv \neg q \in \mathsf{X}$*, to* $p, \neg q \in \mathsf{X}$ *lub* $\neg p, q \in \mathsf{X}$.

($\mathsf{X}7$) *Jeśli* $p \equiv (q \to r) \in \mathsf{X}$*, to* $p, \neg q \in \mathsf{X}$ *lub* $p, r \in \mathsf{X}$ *lub* $\neg p, q, \neg r \in \mathsf{X}$.

($\mathsf{X}8$) *Jeśli* $p \equiv (q \equiv r) \in \mathsf{X}$*, to* $\Phi_i \subseteq \mathsf{X}$ *dla pewnego* $i \in \{1, \ldots, 6\}$*, gdzie* Φ_i *to zbiory określone w Tabeli 2.*

Zdefiniujemy teraz zbiór identyczności generowany z identyczności należących do X.

$$\mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_{0} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\varphi \equiv \psi : \varphi \equiv \psi \in \mathsf{X} \text{ lub } \psi \equiv \varphi \in \mathsf{X}\} \cup \{\varphi \equiv \varphi : \varphi \in \mathsf{FOR}\}$$

$$\mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_{n+1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathsf{ID}^{\neg}_{n+1} \cup \mathsf{ID}^{\to}_{n+1} \cup \mathsf{ID}^{\equiv}_{n+1},$$

gdzie zbiory $\mathsf{ID}^{\neg}_{n+1}$ i $\mathsf{ID}^{\#}_{n+1}$, dla $\# \in \{\to, \equiv\}$, zdefiniowane są następująco:

$$\mathsf{ID}^{\neg}_{n+1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\neg\varphi \equiv \neg\psi : \varphi \equiv \psi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_{n}\},$$

$$\mathsf{ID}^{\#}_{n+1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(\varphi \# \vartheta) \equiv (\psi \# \chi) : \varphi \equiv \psi, \vartheta \equiv \chi \in \textstyle\bigcup_{k \leqslant n} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_k\}.$$

Wreszcie:

$$\mathsf{ID}^{\mathsf{X}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \bigcup_{n \geqslant 0} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n \cup \left\{ \varphi \equiv \psi : \text{ istnieją } \theta_1, \ldots, \theta_k, k \geqslant 1, \right.$$
$$\left. \text{takie, że } \varphi \equiv \theta_1, \ldots, \theta_k \equiv \psi \in \bigcup_{n \geqslant 0} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n \right\}.$$

Relację $\approx$ na FOR definiujemy w następujący sposób:

$$\varphi \approx \psi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \varphi \equiv \psi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}.$$

Lemat 4. *Niech* X *będzie liściem otwartej gałęzi* $\mathsf{T}^{*}_{\mathsf{SCI}}$*-drzewa. Wtedy relacja* $\approx$ *jest relacją równoważności na zbiorze* FOR.

Dowód. Bezpośrednio z definicji $\approx$ oraz ID^{X} otrzymujemy, że $\approx$ jest zwrotna i przechodnia. Wykażemy indukcyjnie, że $\approx$ jest symetryczna. Niech $\varphi, \psi \in \mathsf{FOR}$ będą takie, że $\varphi \equiv \psi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_0$. Wówczas na mocy definicji $\mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_0$, $\psi \equiv \varphi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_0 \subseteq \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$. Załóżmy teraz, że dla dowolnych $0 \leqslant k \leqslant n$ zachodzi:

$(*)$ Jeśli $\varphi \equiv \psi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_k$, to $\psi \equiv \varphi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$.

Pokażemy, że $(*)$ zachodzi dla $n+1$. Niech $\varphi \equiv \psi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_{n+1}$, co oznacza, że formuła ta należy do $\mathsf{ID}^{\neg}_{n+1}$ lub $\mathsf{ID}^{\#}_{n+1}$, czyli ma jedną z następujących postaci: (1) $\neg\vartheta \equiv \neg\chi$ lub (2) $(\vartheta \# \chi) \equiv (\sigma \# \tau)$, dla pewnych formuł $\vartheta, \chi, \sigma, \tau$ i $\# \in \{\rightarrow, \equiv\}$.

Jeśli $\neg\vartheta \equiv \neg\chi \in \mathsf{ID}^{\neg}_{n+1}$, to $\vartheta \equiv \chi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n$, co na mocy założenia indukcyjnego oznacza, że $\chi \equiv \vartheta \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n$. A zatem, bezpośrednio z definicji $\mathsf{ID}^{\neg}_{n+1}$, dostajemy, że $\neg\chi \equiv \neg\vartheta \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_{n+1}$. Jeśli $(\vartheta \# \chi) \equiv (\sigma \# \tau) \in \mathsf{ID}^{\#}_{n+1}$, to $\vartheta \equiv \sigma \in \bigcup_{k \leqslant n} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_k$ i $\chi \equiv \tau \in \bigcup_{k \leqslant n} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_k$. Na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy, że $\sigma \equiv \vartheta \in \bigcup_{k \leqslant n} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_k$ oraz $\tau \equiv \chi \in \bigcup_{k \leqslant n} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_k$. A zatem z definicji $\mathsf{ID}^{\#}_{n+1}$ otrzymujemy $(\sigma \# \tau) \equiv (\vartheta \# \chi) \in \mathsf{ID}^{\#}_{n+1}$. Pokazaliśmy więc, że $(*)$ zachodzi dla dowolnego $k \geqslant 0$.

Niech $\theta_1, \ldots, \theta_k$, dla $k \geqslant 1$, będą formułami takimi, że $\varphi \equiv \theta_1, \ldots, \theta_k \equiv \psi$ należą do $\bigcup_{n \geqslant 0} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n$. Na mocy $(*)$, dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ formuły $\psi \equiv \theta_k, \ldots, \theta_1 \equiv \varphi$ również muszą należeć do $\bigcup_{n \geqslant 0} \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n$, co implikuje, że $\psi \equiv \varphi \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$ i kończy dowód symetrii $\approx$. $\square$

Lemat 5. *Niech* X *będzie liściem otwartej gałęzi* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$*-drzewa. Wtedy jeśli* $\neg\varphi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$*, to:*

$(*)$ $\quad \varphi \in \mathsf{X} \cup \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\neg\varphi \notin \mathsf{X} \cup \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$.

Dowód. Niech $\neg\varphi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$. Wtedy $\varphi = p$ lub $\varphi = (p \equiv q)$, dla pewnych zmiennych zdaniowych p, q. Rozważmy przypadek, gdy $\varphi = p$. Zbiór ID^{X} zawiera wyłącznie identyczności, a zatem jeśli $p \in \mathsf{X} \cup \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$, to $p \in \mathsf{X}$, a stąd $\neg p \notin \mathsf{X}$, gdyż w przeciwnym razie X byłby zbiorem aksjomatycznym, co przeczyłoby otwartości gałęzi, do której X należy. A zatem $\neg p \notin \mathsf{X} \cup \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$. Załóżmy więc, że $\neg p \notin \mathsf{X} \cup \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$, ale $p \notin \mathsf{X}$. Wtedy $q \equiv \neg p \in \mathsf{X} \subseteq \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$, dla pewnej zmiennej zdaniowej q. Własność $(\mathsf{X}6)$ z Lematu 3 implikuje wówczas, że albo $p \in \mathsf{X}$ albo $\neg p \in \mathsf{X}$, sprzeczność.

Pokażemy teraz, że lemat zachodzi dla $\varphi = (p \equiv q)$. Ponieważ $p \not\equiv q \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$, to $p \not\equiv q \in \mathsf{X}$, gdyż X jest zbiorem prostych formuł, a w żadnej z nich $p \not\equiv q$ nie może być właściwą podformułą. Wtedy $p \neq q$ oraz $p \equiv q \notin \mathsf{X}$, gdyż w przeciwnym razie X byłby zbiorem aksjomatycznym. Wystarczy więc pokazać, że jeśli $p \not\equiv q \in \mathsf{X}$, to $p \equiv q \notin \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$.

Na mocy Lematu 3 (własność $(\mathsf{X}4)$) otrzymujemy, iż $p < q$. Definicja $\mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n$ gwarantuje, że $p \equiv q \notin \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n$, dla $n > 0$, a skoro $p \equiv q \notin \mathsf{X}$ oraz $p \neq q$, to $p \equiv q \notin \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_n$, dla dowolnego $n \geqslant 0$. Przypuśćmy jednak, że $p \equiv q \in \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$. Muszą wtedy istnieć formuły $\theta_1, \ldots, \theta_n$ różne od p i q takie, że spełnione są następujące warunki dla każdego $i \in \{1, \ldots, n-1\}$:

(A1) $p \equiv \theta_1$ lub $\theta_1 \equiv p$ należy do X,

...

(Ai) $\theta_i \equiv \theta_{i+1}$ lub $\theta_{i+1} \equiv \theta_i$ należy do $\mathsf{ID}^{\mathsf{X}}_{n_i}$, dla pewnego $n_i \geqslant 0$,

...

(An) $q \equiv \theta_n$ lub $\theta_n \equiv q$ należy do X.

Załóżmy, że $n = 1$. Niech $p \equiv \theta_1 \in \mathsf{X}$, co oznacza, że $p < \theta_1$. Wtedy jeśli $\theta_1 \equiv q \in \mathsf{X}$, to $\theta_1 < q$, a zatem $p \not\equiv \theta_1$ musi należeć do X, gdyż w przeciwnym razie do X, zawierającego formuły $p \not\equiv q$ i $\theta_1 \equiv q$, stosowałaby się reguła (fun), co oznaczałoby, że $p \equiv \theta_1 \in \mathsf{X}$ oraz $p \not\equiv \theta_1 \in \mathsf{X}$, sprzeczność. Z kolei jeśli $q \equiv \theta_1 \in \mathsf{X}$, to $q < \theta_1$, co oznacza, że $p \equiv q \in \mathsf{X}$ (w przeciwnym razie (fun) stosowałaby się do X), a to przeczy założeniu.

Przypuśćmy więc, że $\theta_1 \equiv p \in \mathsf{X}$, co implikuje, że $\theta_1 < p$, a stąd $\theta_1 < q$, gdyż $p < q$. To zaś oznacza, że $\theta_1 \equiv q \in \mathsf{X}$. Wiemy jednak, że formuły $p \not\equiv q$ i $\theta_1 \equiv p$ należą do X oraz $\theta_1 < p$, a stąd wynika,

że $\theta_1 \not\equiv q$ również musi należeć do X, gdyż w przeciwnym razie do X stosowałaby się reguła (fun) i X nie byłby liściem. Otrzymaliśmy więc, że obie formuły $\theta_1 \equiv q$ i $\theta_1 \not\equiv q$ należą do X, co z kolei oznacza, że X jest zbiorem aksjomatycznym, a to pozostaje w sprzeczności z założeniem o otwartości gałęzi, do której należy X.

W ogólnym przypadku, gdy $n > 1$, dowód jest analogiczny. □

Lemat 6. *Niech X będzie liściem otwartej gałęzi $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa. Wtedy dla dowolnych formuł $\varphi, \psi, \vartheta, \chi$ oraz $\# \in \{\rightarrow, \equiv\}$ zachodzi:*

1. *Jeśli $\varphi \approx \psi$, to $\neg\varphi \approx \neg\psi$.*
2. *Jeśli $\varphi \approx \psi$ oraz $\vartheta \approx \chi$, to $(\varphi \# \vartheta) \approx (\psi \# \chi)$.*

Dowód. Niech $\# \in \{\rightarrow, \equiv\}$. Załóżmy, że $\varphi \approx \psi$, to znaczy $\varphi \equiv \psi \in \mathsf{ID}^X$. Jeśli $\varphi \equiv \psi \in \bigcup_{n \geqslant 0} \mathsf{ID}^X_n$, to z definicji ID^X również $\neg\varphi \equiv \neg\psi \in \mathsf{ID}^X$. Załóżmy, że istnieją $\theta_1, \ldots, \theta_k$ takie, że $\varphi \equiv \theta_1, \ldots, \theta_k \equiv \psi \in \bigcup_{n \geqslant 0} \mathsf{ID}^X_n$, czyli istnieją $m_1, \ldots, m_k$ takie, że $\varphi \equiv \theta_1 \in \mathsf{ID}^X{}_{m_1}, \ldots, \theta_k \equiv \psi \in \mathsf{ID}^X{}_{m_k}$. Bezpośrednio z definicji ID^X otrzymujemy więc, że $\neg\varphi \equiv \neg\theta_1 \in \mathsf{ID}^X{}_{m_1+1}, \ldots, \neg\theta_k \equiv \neg\psi \in \mathsf{ID}^X{}_{m_k+1}$, co z kolei oznacza, że $\neg\varphi \equiv \neg\psi \in \mathsf{ID}^X$, czyli $\neg\varphi \approx \neg\psi$. Dowód (2) jest analogiczny. □

Korzystając z Lematu 3, własności reguł i konstrukcji drzew w systemie $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ można udowodnić następujący lemat:

Lemat 7. *Niech X będzie liściem otwartej gałęzi $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa. Wtedy:*

(D0) *Jeśli $\zeta \in X$, $p \in \mathsf{FOR}^X$ i $\zeta \approx p$, to $p \in X$.*

(D1) *Jeśli $\zeta \in X$, $\varphi \in \mathsf{FOR}^X$ i $\zeta \approx \neg\varphi$, to $\varphi \notin X$.*

(D2) *Jeśli $\zeta \in X$, $\varphi \equiv \psi \in \mathsf{FOR}^X$ i $\zeta \approx (\varphi \equiv \psi)$, to $\varphi \approx \psi$.*

(D3) *Jeśli $\zeta \in X$, $\varphi \rightarrow \psi \in \mathsf{FOR}^X$ i $\zeta \approx (\varphi \rightarrow \psi)$, to $\varphi \notin X$ lub $\psi \in X$.*

Dowód powyższych własności jest dość elementarny, ale wymaga żmudnych rachunków i rozważania wielu przypadków, dlatego go pomijamy. Nieformalne uzasadnienie tych własności znaleźć można w dyskusji w Sekcji 2.

Klasę abstrakcji wyznaczoną przez formułę $\varphi \in \mathsf{FOR}^X$ będziemy oznaczać $\varphi^{\approx}$. Niech $\varphi, \psi \in \mathsf{FOR}^X$ i $\# \in \{\rightarrow, \equiv\}$. Mówimy, że $\varphi^{\approx}$ jest $(\neg)$-domknięte ze względu na $\psi \in \mathsf{FOR}^X$, gdy $\varphi \approx \psi$ i $\neg\psi \in \mathsf{FOR}^X$. Jeśli nie istnieje $\psi \in \mathsf{FOR}^X$ takie, że $\varphi^{\approx}$ jest $(\neg)$-domknięte ze względu na ψ, to mówimy, że $\varphi^{\approx}$ nie jest $(\neg)$-domknięte. Parę $(\varphi^{\approx}, \psi^{\approx})$ nazywamy

$(\#)$-domkniętą ze względu na (ϑ, χ), dla $\vartheta, \chi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$, gdy $\varphi \approx \vartheta, \psi \approx \chi$ oraz $\vartheta \# \chi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$. Jeśli nie istnieją $\vartheta, \chi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ takie, że $(\varphi^{\approx}, \psi^{\approx})$ jest $(\#)$-domknięte ze względu na (ϑ, χ), to mówimy, że para $(\varphi^{\approx}, \psi^{\approx})$ nie jest $(\#)$-domknięta.

Niech $0, 1 \notin \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ będą takie, że $1 \neq 0$. W dalszej części pracy zakładamy, że dla dowolnych $w, u \in \{0, 1\}$ oraz $\varphi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$, w nie jest $(\neg)$-domknięte oraz pary (w, u), $(w, \varphi^{\approx})$ i $(\varphi^{\approx}, w)$ nie są $(\#)$-domknięte.

Niech X będzie liściem otwartej gałęzi $\mathsf{T}^{*}_{\mathsf{SCI}}$-drzewa. X-*strukturą* nazywamy strukturę o postaci $\mathcal{M}^{\mathsf{X}} = (\mathsf{U}^{\mathsf{X}}, \mathsf{D}^{\mathsf{X}}, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv})$ taką, że:

- $\mathsf{U}^{\mathsf{X}} = \{\varphi^{\approx} : \varphi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}\} \cup \{1, 0\}$, dla $1, 0 \notin \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ i $1 \neq 0$,
- $\mathsf{D}^{\mathsf{X}} = \{w \in \mathsf{U}^{\mathsf{X}} : \text{istnieje } \varphi \in \mathsf{X} \text{ takie, że } \varphi \in w\} \cup \{1\}$.

Operacje $\tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv}$ zdefiniowane są dla dowolnych $w, u \in \mathsf{U}$ następująco:

$$\tilde{\neg} w \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \mathsf{t}, & \text{gdy } w \text{ jest } (\neg)\text{-domknięte ze względu na } \psi \text{ i } \neg\psi \in \mathsf{t}, \\ 1, & \text{gdy } w \text{ nie jest } (\neg)\text{-domknięte i } w \notin \mathsf{D}^{\mathsf{X}}, \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

$$w \tilde{\rightarrow} u \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \mathsf{t}, & \text{gdy } (w, u) \text{ jest } (\rightarrow)\text{-domknięta ze względu na } (\vartheta, \chi) \\ & \text{i } \vartheta \rightarrow \chi \in \mathsf{t}, \\ 1, & \text{gdy } (w, u) \text{ nie jest } (\rightarrow)\text{-domknięta} \\ & \text{i } (w \notin \mathsf{D}^{\mathsf{X}} \text{ lub } u \in \mathsf{D}^{\mathsf{X}}), \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

$$w \tilde{\equiv} u \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \mathsf{t}, & \text{gdy } (w, u) \text{ jest } (\equiv)\text{-domknięta ze względu na } (\vartheta, \chi) \\ & \text{i } \vartheta \equiv \chi \in \mathsf{t}, \\ 1, & \text{gdy } (w, u) \text{ nie jest } (\equiv)\text{-domknięta oraz } w = u, \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Lemat 8. *Niech* X *będzie liściem otwartej gałęzi* $\mathsf{T}^{*}_{\mathsf{SCI}}$*-drzewa. Wtedy* X*-struktura jest* SCI*-modelem.*

Dowód. Niech $\mathcal{M}^{\mathsf{X}} = (\mathsf{U}^{\mathsf{X}}, \mathsf{D}^{\mathsf{X}}, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv})$ będzie X-strukturą. Oczywiście, U^{X}, D^{X} są niepuste, a D^{X} jest właściwym podzbiorem U^{X}. Najpierw należy wykazać, że $\tilde{\neg}$, $\tilde{\rightarrow}$ i $\tilde{\equiv}$ są funkcjami na U^{X}. Dla przykładu wykażemy, że $\tilde{\neg}$ jest funkcją.

Niech $w \in \mathsf{U}^{\mathsf{X}}$. Jeśli w nie jest $(\neg)$-domknięte, to $\tilde{\neg} w$ jest jednoznacznie określone, na mocy definicji $\tilde{\neg}$. Załóżmy więc, że $w = \varphi^{\approx}$ jest

$(\neg)$-domknięte ze względu na $\psi, \psi' \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$. Wtedy $\varphi \approx \psi$, $\varphi \approx \psi'$ oraz $\neg\psi, \neg\psi' \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$. Z symetrii i przechodniości $\approx$, dostajemy, że $\psi \approx \psi'$. Z kolei Lemat 6 implikuje, że $\neg\psi \approx \neg\psi'$, co oznacza, że $\tilde{\neg}w = (\neg\psi)^{\approx} = (\neg\psi')^{\approx}$. Dowody, że $\tilde{\rightarrow}$ i $\tilde{\equiv}$ są funkcjami na $\mathcal{U}^{\mathsf{X}}$, są analogiczne i również wykorzystują Lemat 6.

Wykażemy teraz, że dla dowolnych $w, u \in \mathcal{U}^{\mathsf{X}}$ zachodzi:

1. $\tilde{\neg}w \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \notin \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$.
2. $w\tilde{\rightarrow}u \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \notin \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$ lub $u \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$.
3. $w\tilde{\equiv}u \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w = u$.

Dowód 1: $\tilde{\neg}w \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \notin \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$.

Zauważmy, że jeśli $w \in \mathcal{U}^{\mathsf{X}}$ nie jest $(\neg)$-domknięte, to $\tilde{\neg}w \in \{0, 1\}$, a dowodzona równoważność jest prostą konsekwencją definicji operacji $\tilde{\neg}$.

Niech $w = \varphi^{\approx}$, dla $\varphi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$, będzie $(\neg)$-domknięte ze względu na $\psi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$. Wtedy $\neg\psi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$, $\varphi \approx \psi$ oraz $\tilde{\neg}w = (\neg\psi)^{\approx}$. Załóżmy, że $\tilde{\neg}w = (\neg\psi)^{\approx} \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$. Wtedy istnieje $\zeta \in \mathsf{X}$ taka, że $\zeta \approx \neg\psi$. Własność $(\mathsf{D1})$ z Lematu 7 implikuje wówczas, że $\psi \notin \mathsf{X}$. Przypuśćmy teraz, dla dowodu nie wprost, że $\psi^{\approx} \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$. Wtedy istnieje $\chi \in \mathsf{X}$ taka, że $\chi \approx \psi$, a stąd na mocy Lematu 6 otrzymujemy, że $\neg\chi \approx \neg\psi$. Z symetryczności i przechodniości $\approx$ dostajemy, że $\zeta \approx \neg\chi$. Z $(\mathsf{D1})$ Lematu 7 wynika wówczas, że $\chi \notin \mathsf{X}$ – sprzeczność. A zatem $\psi^{\approx} \notin \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$, czyli $w \notin \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$. Załóżmy teraz, że $\tilde{\neg}w \notin \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$, czyli $(\neg\psi)^{\approx} \notin \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$. A zatem dla dowolnej formuły ζ, jeśli $\zeta \approx \neg\psi$, to $\zeta \notin \mathsf{X}$. W szczególności $\neg\psi \approx \neg\psi$, a więc $\neg\psi \notin \mathsf{X}$, czyli $\neg\psi \notin \mathsf{X} \cup \mathsf{ID}^{\mathsf{X}}$, co na mocy Lematu 5 oznacza, że $\psi \in \mathsf{X}$, czyli $w = \psi^{\approx} \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$.

Dowód 2: $w\tilde{\rightarrow}u \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \notin \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$ lub $u \in \mathrm{D}^{\mathsf{X}}$.

Jeśli para (w, u) nie jest $(\rightarrow)$-domknięta, to własność wynika z definicji operacji $\tilde{\rightarrow}$. Załóżmy więc, że para (w, u) jest $(\rightarrow)$-domknięta, to znaczy istnieją ϑ i χ takie, że $w = \vartheta^{\approx}$, $u = \chi^{\approx}$, $\vartheta \rightarrow \chi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ oraz $w\tilde{\rightarrow}u = (\vartheta \rightarrow \chi)^{\approx}$. Zauważmy, że skoro $\vartheta \rightarrow \chi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$, to istnieje $p \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ takie, że $p \equiv (q \rightarrow r) \in \mathsf{X}$ oraz $\vartheta = q$ i $\chi = r$, dla pewnych zmiennych zdaniowych q i r. To zaś oznacza, że $p \approx (q \rightarrow r)$. Ponadto, skoro $p \equiv (q \rightarrow r) \in \mathsf{X}$, to na mocy Lematu 3, $(\mathsf{X7})$ zachodzi jeden z następujących przypadków:

$(\rightarrow_1)$ $p \in \mathsf{X}$ oraz $(\neg q \in \mathsf{X}$ lub $r \in \mathsf{X})$,

$(\rightarrow_2)$ $\neg p \in \mathsf{X}$, $q \in \mathsf{X}$ oraz $\neg r \in \mathsf{X}$.

Niech $w\tilde{\rightarrow}u \in D^X$, to znaczy $(q \rightarrow r)^{\approx} \in D^X$. Wtedy istnieje $\zeta \in X$ taka, że $\zeta \approx (q \rightarrow r)$, a stąd na mocy (D3) z Lematu 7, $q \notin X$ lub $r \in X$, co implikuje, że $w = q^{\approx} \notin D^X$ lub $u = r^{\approx} \in D^X$. Załóżmy teraz, że $w\tilde{\rightarrow}u \notin D^X$, czyli $(q \rightarrow r)^{\approx} \notin D^X$. Wtedy dla dowolnej formuły ζ, jeśli $\zeta \approx (q \rightarrow r)$, to $\zeta \notin X$. Ponieważ $p \equiv (q \rightarrow r) \in X$, to $p \approx (q \rightarrow r)$, a więc $p \notin X$. Zachodzi więc przypadek $(\rightarrow_2)$, czyli $q \in X$ oraz $\neg r \in X$. W konsekwencji $w = q^{\approx} \in D^X$ oraz $u = r^{\approx} \notin D^X$.

Dowód 3: $w\tilde{\equiv}u \in D^X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w = u$.

Bezpośrednio z definicji operacji $\tilde{\equiv}$ można łatwo wykazać, że jeśli para (w, u) nie jest $(\equiv)$-domknięta, to własność zachodzi. Załóżmy więc, że para (w, u) jest $(\equiv)$-domknięta, to znaczy istnieją ϑ i χ takie, że $w = \vartheta^{\approx}$, $u = \chi^{\approx}$, $\vartheta \equiv \chi \in FOR^X$ oraz $(w\tilde{\equiv}u) = (\vartheta \equiv \chi)^{\approx}$.

Załóżmy, że $w\tilde{\equiv}u = (\vartheta \equiv \chi)^{\approx} \in D^X$. Wtedy istnieje formuła ζ taka, że $\zeta \in X$ oraz $\zeta \approx (\vartheta \equiv \chi)$, co na mocy Lematu 7 (D2) oznacza, że $\vartheta \approx \chi$, a zatem $\vartheta^{\approx} = w = u = \chi^{\approx}$. Załóżmy teraz, że $w\tilde{\equiv}u = (\vartheta \equiv \chi)^{\approx} \notin D^X$. Wtedy dla dowolnej formuły ζ, jeśli $\zeta \approx (\vartheta \equiv \chi)$, to $\zeta \notin X$. Relacja $\approx$ jest zwrotna, a zatem w szczególności $(\vartheta \equiv \chi) \approx (\vartheta \equiv \chi)$, czyli $\vartheta \equiv \chi \notin X$. Wtedy z $\vartheta \equiv \chi \in FOR^X$ i $\vartheta \equiv \chi \notin X$ wynika, że $\vartheta \not\equiv \chi$. To zaś oznacza, że $\vartheta \not\equiv \chi \in X \cup ID^X$, a stąd i z Lematu 5 dostajemy, że $\vartheta \equiv \chi \notin ID^X$, czyli $\vartheta \not\approx \chi$. A zatem $\vartheta^{\approx} = w \neq u = \chi^{\approx}$, co kończy dowód. □

Niech v^X będzie wartościowaniem w SCI-modelu $\mathcal{M}^X = (U^X, D^X, \tilde{\neg}, \tilde{\rightarrow}, \tilde{\equiv})$ określonym następująco:

$$v^X(p) \stackrel{df}{=} \begin{cases} p^{\approx}, \text{gdy } p \in FOR^X \cap V, \\ 0, \text{gdy } p \in V \backslash FOR^X. \end{cases}$$

oraz dla dowolnych $\varphi, \psi \in FOR$:

$v^X(\neg\varphi) = \tilde{\neg} v^X(\varphi)$
$v^X(\varphi \# \psi) = v^X(\varphi) \tilde{\#} v^X(\psi)$, dla $\# \in \{\rightarrow, \equiv\}$.

Oczywiście v^X jest poprawnie określonym SCI-wartościowaniem.

Lemat 9. *Niech* X *będzie liściem otwartej gałęzi* T^*_{SCI}*-drzewa. Wtedy dla dowolnej formuły* $\varphi \in FOR^X$, $v^X(\varphi) = \varphi^{\approx}$.

Dowód. Dla zmiennych zdaniowych $p \in FOR^X$ teza zachodzi na mocy samej definicji v^X. Jeśli $\neg\varphi \in FOR^X$, to $\varphi^{\approx}$ jest $(\neg)$-domknięte ze względu na $\varphi \in FOR^X$, a zatem z definicji operacji $\tilde{\neg}$ dostajemy, że $\tilde{\neg}\varphi^{\approx} = (\neg\varphi)^{\approx}$. Ponieważ v^X jest SCI-wartościowaniem $v^X(\neg\varphi) = \tilde{\neg} v^X(\varphi)$,

a stąd $\nu^{\mathsf{X}}(\neg\varphi) = (\neg\varphi)^{\approx}$. Niech $\# \in \{\rightarrow, \equiv\}$. Jeśli $\varphi\#\psi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$, to $\varphi, \psi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$ oraz $(\varphi^{\approx}, \psi^{\approx})$ jest $(\#)$-domknięte ze względu na (φ, ψ), a zatem na mocy definicji operacji $\tilde{\#}$ wiemy, że $\varphi^{\approx}\tilde{\#}\psi^{\approx} = (\varphi\#\psi)^{\approx}$, a stąd i z faktu, że ν^{X} jest SCI-wartościowaniem, otrzymujemy, iż $\nu^{\mathsf{X}}(\varphi\#\psi) = \varphi^{\approx}\tilde{\#}\psi^{\approx} = (\varphi\#\psi)^{\approx}$, co kończy dowód. □

Następujący lemat jest prostym wnioskiem z definicji modelu $\mathcal{M}^{\mathsf{X}}$:

Lemat 10. *Niech* X *będzie liściem otwartej gałęzi* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$*-drzewa. Wtedy dla dowolnej formuły* $\varphi \in \mathsf{FOR}^{\mathsf{X}}$*, jeśli* $\varphi \in \mathsf{X}$*, to* $\mathcal{M}^{\mathsf{X}}, \nu^{\mathsf{X}} \models \varphi$.

Twierdzenie 4 (Pełność $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$)**.** *Dla dowolnej* SCI*-formuły* φ*, jeśli* φ *jest tautologią* SCI*, to istnieje domknięte* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$*-drzewo dla* φ.

Dowód. Niech φ będzie SCI-formułą. Przypuśćmy, że nie istnieje domknięte $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewo dla φ. Weźmy liść X otwartej gałęzi $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$-drzewa dla φ. Wtedy na mocy Lematu 10 każda formuła ze zbioru X jest spełniona w SCI-modelu $\mathcal{M}^{\mathsf{X}}$ przy wartościowaniu ν^{X}, a zatem zbiór X jest SCI-spełnialny. Z Lematu 1 wynika wówczas, że każdy poprzednik X w otwartej gałęzi, do której należy X, jest również zbiorem spełnialnym w SCI, a stąd w szczególności korzeń drzewa, czyli $\{\neg\varphi\}$ jest zbiorem SCI-spełnialnym. To zaś oznacza, że φ nie jest tautologią SCI. □

Wnioskiem z Twierdzeń 2, 3 i 4 jest:

Wniosek 1. *System* $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ *jest procedurą decyzyjną dla* SCI.

4 Podsumowanie

Przedstawiony w pracy system $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ jest poprawną i pełną procedurą decyzyjną dla SCI. Przykłady dowodów przedstawione w Sekcji 2 sugerują, że system $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ może być skuteczniejszy niż systemy $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ i $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$, gdyż dowody formuł z Tabeli 4 i 6 są prostsze i krótsze niż dowody tych samych formuł w systemach $\mathsf{DT}_{\mathsf{SCI}}$ i $\mathsf{T}_{\mathsf{SCI}}$. Porównanie wszystkich trzech systemów wymaga oczywiście pogłębionych badań i testów. Ewidentną różnicą pomiędzy $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ a pozostałymi systemami jest drastycznie większa liczba reguł angażujących spójnik identyczności. W systemie $\mathsf{T}^*_{\mathsf{SCI}}$ jest ich aż 17. Z drugiej strony trudno uznać tę okoliczność za wadę. To dość

częste zjawisko w systemach dedukcyjnych: im więcej reguł, tym łatwiejsza i efektywniejsza dedukcja.

Literatura

1. I.H. Anellis. From semantic tableaux to Smullyan trees: A history of the development of the falsifiability tree method. *Modern Logic*, 1:36–69, 1990.
2. S.L. Bloom, and R. Suszko. Investigations into the sentential calculus with identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13(3):289–308, 1972.
3. S. Chlebowski. Sequent calculi for SCI. *Studia Logica*, 106:541–563, 2018.
4. M. Fitting. Introduction. In M. D'Agostino, D. Gabbay, R. Hähnle, J. Posegga, editors, *Handbook of tableau methods*, pp. 1–44. Springer, Dordrecht, 1999.
5. J. Golińska-Pilarek. Rasiowa-Sikorski proof system for the non-Fregean sentential logic SCI. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(4): 511–519, 2007.
6. J. Golińska-Pilarek. Panorama logik niefregowskich. W D. Leszczyńska-Jasion, S. Chlebowski, A. Tomczyk, A. Zakosztowicz, redakcja, *Język – struktura – ontologia. Tom dedykowany pamięci Romana Suszki*, ss. 13–85. Wydawnictwo Nauk Humanistycznych i Społecznych UAM, Poznań, 202x.
7. J. Golińska-Pilarek, T. Huuskonen, and M. Zawidzki. Deciding non-Fregean identities: Tableaux vs. dual tableaux. Technical report, 2021.
8. J. Golińska-Pilarek, T. Huuskonen, and M. Zawidzki. Tableau-based decision procedure for non-Fregean logic of sentential identity. In A. Platzer, G. Sutcliffe, editors, *Automated deduction – CADE-28 – 28th International Conference on Automated Deduction, July 12–15, 2021. Proceedings*, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Cham, 2021.
9. J. Golińska-Pilarek, and M. Welle. Deduction in non-Fregean propositional logic SCI. *Axioms*, 8, 2019.
10. A. Michaels. A uniform proof procedure for SCI tautologies. *Studia Logica*, 33(3):299–310, 1974.
11. M. Omyła. *Zarys logiki niefregowskiej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1986.
12. E. Orłowska, and J. Golińska-Pilarek. *Dual tableaux: Foundations, methodology, case studies*, Volume 33 of Trends in logic. Springer, Netherlands, 2011.
13. J. Pogonowski, and I. Bondecka-Krzykowska. Agnostyczny jeż w lesie semantycznym. W K. Trzęsicki, redakcja, *Ratione Et Studio. Profesorowi Marciszewskiemu w darze*, ss. 191–234. Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok, 2005.
14. R. Suszko. Non-Fregean logic and theories. *Analele Universităţii Bucureşti, Acta Logica*, 11:105–125, 1968.
15. R. Suszko. Odrzucenie aksjomatu Fregego i reifikacja sytuacji, tłum. z j. angielskiego J. Pogonowski, Wydawnictwo UMCS, Lublin, 2000.
    Podstawa tłumaczenia: *Abolition of the Fregean axiom*, W R. Parikh, editor, *Colloquium, Symposium on Logic held at Boston, 1972–1973*, Volume 453 of *Lecture Notes in Mathematics*, pp. 169–239, Springer Verlag, 1975.
    Przekład Jerzego Pogonowskiego został ponownie wydany w D. Leszczyńska-Jasion, S. Chlebowski, A. Tomczyk, A. Zakosztowicz, redakcja, *Język – struktura*

– *ontologia. Tom dedykowany pamięci Romana Suszki*, ss. 321–381. Wydawnictwo Nauk Humanistycznych i Społecznych UAM, Poznań, planowane wydanie w 2021.
16. A. Wasilewska. A sequence formalization for SCI. *Studia Logica*, 35(3):213–217, 1976.
17. A. Wasilewska. DFC-algorithms for Suszko logic and one-to-one Gentzen type formalizations. *Studia Logica*, 43(4):395–404, 1984.

Axioms, hypotheses and rules; methodological considerations

Andrzej Indrzejczak

Abstract We consider different ways of representing formal theories and hypothetical reasoning in the framework of sequent calculus (SC). These two issues, although apparently separate, require similar technical treatment. Moreover, a deeper analysis of special features of SC leads to further distinctions in their analysis. Various factors have an impact on the ways in which axioms or hypotheses may be formally conducted in SC. The most important are connected with different interpretations of the notion of a sequent and with different kinds of deducibility relation induced by SC. We will show that both axioms and hypotheses may be expressed not only by special sequents but also by special rules. To this effect we will state a general theorem on possible ways of transforming sequents into rules and focus on the problem of their good proof-theoretical behaviour.

Introduction

Proof theory, since its origins in Hilbert Program, was involved in research on formal properties of mathematical theories, like consistency or decidability. Logics and formal theories were mostly investigated in the setting of Frege-Hilbert axiomatic systems. This approach is based on the

Andrzej Indrzejczak
e-mail: andrzej.indrzejczak@filhist.uni.lodz.pl
Department of Logic and Methodology of Science, University of Lodz

traditional view of axiomatic theories but reformulated in the way which permits stricter formal control. In particular, in contrast to the traditional semiformal approach to axiomatic theories, in the modern setting axioms are formulated in the precisely defined formal language, and the set of primitive rules of inference is established. This makes possible to define precisely the central notion of a proof in axiomatic theory. Such an approach is elegant, simple, easy to describe and to investigate, but has some disadvantages. In particular, modern formal axiomatic theories and formal proofs are far from the practice of mathematicians.

The groundbreaking works of Gentzen [7] and Jaśkowski [12] provided the first formally accurate approaches to the notion of proof. The new kinds of formal systems they introduced independently, namely natural deduction (ND) and sequent calculi (SC), changed radically the character of Hilbertian proof theory. Although the limitative results of Gödel and others showed that far-reaching aims of Hilbert Program cannot be realised, the new tools have opened the new perspectives. ND and SC allow us not only to construct formal proofs closer to practical reasoning, but also to obtain new metatheoretical results concerning formal theories. Indirectly they had also an influence on the development of automated deduction, since proof systems popular in this area like resolution and tableau calculi, are in a sense derivative of SC. They provided also the basis for more philosophically oriented research concerning the notion of logical constant and the development of proof-theoretic semantics.

In what follows we focus on two issues which may seem totally separate at first sight: formalization of theories and hypothetical reasoning. These issues are strongly connected also with other problems, like encoding definitions by means of specific rules, but there is no space for further elaboration. Our considerations will be carried out in the framework of SC which allow us to notice deep connections between them. Since the machinery of SC is crucial for understanding our considerations we start with a brief survey of this calculus and its properties.

1 Sequent calculus

Sequent calculi, introduced by Gentzen as a kind of auxiliary system for investigation on natural deduction proofs, soon became the most important

tool of modern proof theory. A standard notion of sequent is an ordered pair of the form $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (or $\varphi_1, ..., \varphi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_n$, with $k \geqslant 0, n \geqslant 0$). Γ is called the antecedent and Δ the succedent of a sequent with Γ, Δ being finite multisets of formulae[1]. As the point of reference we will use a standard SC for classical logic FOL, similar to the original Gentzen's system LK. It consists of the following structural and logical rules:

$$(AX)\quad \varphi \Rightarrow \varphi \qquad (Cut)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$(W\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow W)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

$$(C\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow C)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg)\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \vee \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\forall\Rightarrow)\ \frac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\forall)^1\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\varphi}$$

$$(\exists\Rightarrow)^1\ \frac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi}$$

1. where a is a fresh variable (eigenvariable) not occurring in Γ, Δ, φ.

Formulae displayed in the schemata are active whereas those in (possibly empty) multisets Γ, Δ are parametric (or form the context). In particular, a unique formula in the antecedent or succedent of the conclusion is the principal formula of the respective rule application whereas active formulae in the premisses are called side-formulae. Proofs are defined as trees labelled with sequents where each leaf is an axiom and edges are regu-

[1] Sometimes sets are sufficient. On the other hand, more refined data structures are often needed; in particular, Gentzen applied finite sequences.

lated by the rules. Let us focus on some of the characteristic features of the logical rules. First of all they are rules of introduction of a constant, either to the antecedent or to the succedent of a sequent. Moreover, using a terminology of Wansing [24] (see also Poggiolesi [18]), we can observe that they have the following properties:

- Separation: a rule for a constant should not exhibit any other constants in its schema.
- Weak symmetry: each rule should either introduce a constant to the antecedent or to the succedent; if both rules for a constant are of such a kind, the calculus is (simply) symmetric with respect to this constant.
- Weak explicitness: a constant should be present only in the conclusion; if only one occurrence of it is present a rule is (simply) explicit.
- Subformula property: only formulae present in the conclusion and their subformulae (modulo substitution of terms) are present in the premisses.

Rules satisfying these properties are also called canonical by Avron [2]. Note that cut rule does not satisfy the subformula property; an arbitrary formula φ is present in the premisses but not in the conclusion. Thus if we have SC with primitive cut which cannot be eliminable, a proof search cannot be carried out reasonably in a root-first manner, since we do not know in advance if at some stage cut should be used with some arbitrary φ introduced. This has a destructive influence for the possibility of constructive proofs of decidability (or semidecidability) or interpolation. This is why in the modern proof theory constructive proofs of the eliminability of cut (or in ND setting of the normalization of proofs) are so important. On the other hand, the cut rule may be very useful, for example for proving the equivalence of SC with other kinds of formal systems. Thus the optimal situation is when we can provide SC characterization of a logic/theory where cut is in principle not required for proofs in the system (they are analytic in a sense) but admissible. We will illustrate some of its technical advantages in the forthcoming sections.

Among various factors having an impact on the ways in which formal theories or hypothetical reasoning may be formally expressed in the framework of SC the most important are connected with different interpretations of the notion of a sequent and with different kinds of deducibility relation

induced by SC. In particular, sequents may be interpreted in the following two ways:

1. Reductive; by reading them as formulae. This may be obtained in several ways, in particular:

a. $I_G(\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k) = \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$
b. $I_C(\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k) = \neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \wedge \neg\psi_1 \wedge ... \wedge \neg\psi_k)$
c. $I_D(\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k) = \neg\varphi_1 \vee ..., \vee \neg\varphi_i \vee \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

2. Consequential; by treating $\Rightarrow$ as expressing some kind of consequence relation $\vdash$.

The list is far from being complete (see e.g. Paoli [17]) but only such interpretations are of importance in the context of our considerations. Among the reductive interpretations I_G is the original Gentzen's interpretation, I_C, I_D denote conjunctive and disjunctive interpretations. Concerning the problem of consequence relation induced by SC we can distinguish at least two different kinds of related $\vdash$. The first of them was already pointed out as a consequential or metalogical reading of $\Rightarrow$. This consequence relation holds between the (multi)sets of formulae, and in contrast to Tarskian relations which hold between sets and single formula is often called Scott's consequence relation. But we can consider also consequence relations defined between sets of sequents and single sequents, i.e. $\vdash \subseteq P(Seq) \times Seq$. However, due to trivialization of $\Rightarrow$ by any of reductive readings given above, it may be reduced to Tarskian consequence relations.

Note again that different interpretations allow us to exhibit intuitively the importance of cut rule. If we interpret $\Rightarrow$ as a consequence relation, then cut expresses its transitivity which is an essential feature of every such relation. Also, if Γ, Δ, Π are empty (and Σ a singleton), then we can see cut as a kind of (generalised) modus ponens. This case may be also understood as expressing the application of lemmata in a proof; φ is the result that has already been proven and we just use it to shorten a proof we are currently constructing. Cut may be also interpreted in a semantical manner. If we consider a version of cut with the same sets of parameters in both premisses, and we read this rule in a root first manner, it can be treated as expressing the principle of bivalence. Specifically, let us say that the conclusion $\Gamma \Rightarrow \Delta$ is falsified, i.e. all formulae in Γ are true and all in Δ false in some model. Then, any φ is either true or false in this model, which

means that either $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ or $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ is falsified. The same reading applies if we interpret $\Gamma \Rightarrow \Delta$ dually, as verified, then both premisses are verified.

These remarks are again connected with the variety of possible reductive interpretations stated above. To explain the connection let us recall that Hintikka [9] provided one of the first versions of tableau calculus for classical logic. His version is an indirect one in the sense that if we want to prove that $\Gamma \vdash \varphi$ we start with $\Gamma, \neg\varphi$ and decompose this set by means of suitable rules until we construct a tree (with sets of formulae as nodes) where each leaf is contradictory, i.e. contains some $\psi, \neg\psi$. The main difference with SC is that instead of sequents simply sets are used and that a tree is built upside-down. One can easily check that in Hintikka's tableau system there is a step-wise simulation of every rule of SC:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma', \neg\Delta'}{\Gamma, \neg\Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta''} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma'', \neg\Delta''}{\Gamma, \neg\Delta \mid \Gamma', \neg\Delta'}$$

This step-wise simulation is based on the interpretation $\mathrm{I_C}$. In the case of negation a simulation of $(\neg \Rightarrow)$ is trivial and the counterpart of the second rule is a double negation elimination. On the basis of this translation we obtain:

Theorem 1 (Equivalence of Hintikka tableaux and SC).

- *If* $\Gamma \vdash_{\mathrm{Tab}} \varphi$ $(:= \Gamma, \neg\varphi \vdash_{\mathrm{Tab}} \bot)$, *then* $\vdash_{\mathrm{SC}} \Gamma \Rightarrow \varphi$.
- *If* $\vdash_{\mathrm{SC}} \Gamma \Rightarrow \Delta$, *then* $\Gamma, \neg\Delta \vdash_{\mathrm{Tab}} \bot$.

There is a dual version of tableaux devised for classical logic by Rasiowa and Sikorski [19] and developed significantly for several logics and theories by Orłowska and her collaborators (see in particular Orłowska and Golińska-Pilarek [16]). It is based on disjunctive reading of sets, i.e. on $\mathrm{I_D}$. In fact, as far as we are concerned with tableau systems for classical logic, this dual version is just an upside-down version of Schütte's SC [22] with one sided sequents.

SC is also in close relationship to resolution calculi of Robinson [20], in particular on the propositional level[2]. Note that propositional resolution

[2] More on the relations between SC and resolution see for example in Avron [1], Gallier [6], or Fitting [5].

rule is just a cut performed on atomic sequents. The main difference is that in ordinary resolution systems we operate on clauses but we know that they correspond to atomic sequents by I_D so this is only a minor notational variant. What is more important is how we obtain a set of clauses (atomic sequents). Standard resolution is again an indirect method; to prove that $\vdash \varphi$ we transform $\neg\varphi$ into its conjunctive normal form and then make resolutions on its member clauses until we derive an empty clause, i.e. $\bot$. In the framework of SC (with cut) we can divide the job into two stages. We start with $\varphi \Rightarrow$ and build upwards a completed proof tree for it which by the subformula property must terminate. All nonaxiomatic leaves of this tree provide a set of sequents from which we derive $\Rightarrow$ by cuts only. In the general case of proving $\Gamma \vdash \varphi$ we can establish the equivalence of both methods in the following:

Theorem 2. *For any sequent the following are equivalent:*

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\Rightarrow \varphi_1, ..., \Rightarrow \varphi_i, \psi_1 \Rightarrow, ..., \psi_k \Rightarrow \vdash \Rightarrow$

where $\vdash$ *is the relation defined on sequents.*

We should conclude with the following remark. All these correspondencies hold for standard forms of SC, tableaux, dual tableaux and resolution in the context of classical logic. In case of nonclassical logics the situation is much more complicated and there are no simple, uniform ways of changing one system into another but equivalent one. In order to simplify our considerations in what follows we assume that classical logic is always the basis of considered extensions.

2 Formal theories

Let us focus on the problem of using (classical) SC as a basis of formalization of elementary theories. Negri and von Plato [14] described four approaches to this question:

1. Addition of axiomatic sequents $\Rightarrow \varphi$ for each axiom φ.
2. Addition of "mathematical basic sequents" which consist of atomic formulae.

3. Addition of all axioms as a context in the antecedents of all provable sequents.
4. Addition of new rules corresponding to axioms.

In every class we can find several SC formalizations of well known elementary theories. The first approach may be called the "naive" one since it treats SC in the same way as Hilbert system and does not refer to its specific features. Not surprisingly such a solution obstructs the application of specific virtues of SC; in particular, cut elimination theorem cannot be proved. Suppose we have instances of axioms of the form $\Rightarrow \varphi$ and $\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$. In such a system obviously ψ is a thesis, but the only way to prove it is the following:

$$\dfrac{\Rightarrow \varphi \qquad \dfrac{\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\varphi \Rightarrow \psi}\,(\mathtt{Cut})}{\Rightarrow \psi}\,(\mathtt{Cut})$$

Hence cut cannot be eliminated, although their applications may be restricted to such where one of the premisses is an axiom.

The second approach may be seen as a refinement of the first and was already applied by Gentzen in his formalization of Peano arithmetic [8]. It leads to the addition of axiomatic (atomic) sequents of the form $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$, where all φ_j, ψ_l are atomic formulae. Although cut in general is not eliminable, this approach allows us to provide more detailed proof analysis.

The third approach was also considered by Gentzen. Interestingly enough, one can prove cut elimination for it but for any theorem φ of respective theory we do not obtain proofs of $\Rightarrow \varphi$ but of $\Gamma \Rightarrow \varphi$ where Γ is a collection of instances of suitable axioms required in the proof. Accordingly, this approach does not provide an interesting tool for analysis of proofs.

There is a variant of this approach which in fact can be treated also as belonging to the last group. For each axiom φ an SC rule is postulated for elimination of this axiom, which is of the form:

$$(\mathtt{AE})\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Such formalization of cut-free SC for classical logic with identity is considered in Gallier [6], where φ can be an instance of suitable axioms characterising identity. Also Bell and Machover [3] apply this approach in the tableau framework where it is represented just as a rule of introduction of suitable instances of axioms on the branch. Note that in the context of SC this solution, although applied in the cut-free version, is in fact equivalent to addition of the special form of cut. This follows from the result that the cut elimination theorem is equivalent to the result showing eliminability of (AE) where φ is an arbitrary thesis (see Indrzejczak [10]).

It seems that the most interesting approach, in particular for our purposes, is the last one. Gallier's solution is literally speaking of this sort, but it is not very satisfactory since (AE) is rather a trivial kind of rule mechanically applied to any formula. The subformula property does not hold and cut freeness is apparent, as we noted above. Generally speaking, it is not in any sense better than the first approach. What we need is the generation of genuine rules with active formulae in premisses and conclusions and satisfying possibly some welcome proof-theoretic properties like cut elimination or a reasonable form of the subformula property. Such solution which, in some specific form, was advocated by Negri and von Plato [14] and applied to formalisations of several theories on the basis of SC, found many adherents. In particular, Troelstra and Schwichtenberg [23] in the second edition of their well known textbook introduced this characterization of identity instead of the axiomatic characterization which was present in the first edition. Identity is characterised by means of two rules:

$$(\mathsf{RE})\ \frac{t_1 = t_2, \varphi[x/t_1], \varphi[x/t_2], \Gamma \Rightarrow \Delta}{t_1 = t_2, \varphi[x/t_1], \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\mathsf{REP})\ \frac{t = t, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

which are added to SC. In general, the specific features of Negri and von Plato's approach are connected with the fact that active formulae are atomic and occur only on one side of sequents. We will call this variant the one-sided approach; systems in [14] are in fact left- (or antecedent-)sided but in [15] right-(or succedent-)sided systems are also considered. Rules of this kind can safely be added without destroying all results concerning admissibility of structural rules, including cut. However, the rule-based approach to the characterisation of theories may be realised in many different ways, not necessarily as one-sided, despite its obvious virtues. We will focus on

this problem after consideration of the ways of formalizing hypothetical reasoning in the setting of SC.

3 Hypothetical reasoning in general

Introduction of ND or SC decreased the gap between informal reasoning and formal proofs. However, as was pointed out by Schroeder-Heister [21], the very notion of hypothetical proof, and the role and the character of hypotheses, was not clearly elucidated so far. In what follows, we try to describe briefly in what way this concept may be treated in the setting of SC. Schroeder-Heister [21] noticed that there are several competing views concerning hypothetical proofs. One may distinguish:

1. No-assumption view.
2. Placeholder view.
   (a) elimination by discharge;
   (b) elimination by substitution.
3. Bidirectional view.

In [21] these approaches are presented as naturally connected with the specific kind of formal system. The first is most naturally connected with axiomatic systems. Deriving ψ on the basis of the assumption φ is replaced with the proving of $\varphi \rightarrow \psi$ from axioms (and possibly earlier proved theorems). As we noted above, such an approach is formally sound but artificial, since proving theorems on the basis of temporarily assumed hypotheses is common practice.

The second approach (in both versions) is considered as characteristic for ND systems where assumptions may be freely introduced and specific rules, like introduction of implication or reductio ad absurdum, allow their later discharge. Another way of elimination of assumptions is by providing their proof and substituting it in their place. Thus what is crucial in both variants is that hypotheses are something similar to variables in open formulae; they are placeholders. What is ultimately important is a sentence (formula with no free variables) and a thesis having a proof with no open assumptions.

Only the last approach, namely bidirectional view, is presented in [21] as something specfically connected with SC, since sequents are treated as expressing hypothetical proofs, and the rules of SC as rules transforming one hypothetical proof into another one; possibly with no open assumptions. But note that this reading is based on the specific kind of interpretation of sequents (consequential one), very natural, but one of many possible. In contrast to Schroeder-Heister's view I'd like to treat the setting of SC as the most general perspective and examine whether some additional ways of expressing hypothetical reasoning do not arise which are dependent on its abilities. Moreover, as we shall see, this issue shows close relationship to the problem of handling theories in the framework of SC. Basically, it is connected with the possibility of decomposition of complex assumptions into their (atomic) parts, finally formalised either as sequents or as different kinds of rules. Particularly important question is the influence of the chosen options on preservation of good proof-theoretical properties like cut-elimination and subformula-property.

4 Hypothetical reasoning in SC

Generally, the consideration of hypotheses in the setting of SC leads to several distinctions which cannot be even stated in the context of axiomatic or ND systems. For example, in ND both variants of placeholder view may be unified – assumptions are eliminated either by discharge or by substitution. But in SC we are forced to treat them differently.

At first sight it seems that things are simple and obvious. Hypotheses in SC are expressed by axioms of the form $\varphi \Rightarrow \varphi$ which naturally correspond to arbitrary assumptions in ND. This approach is based on the interpretation of $\Rightarrow$ as $\vdash$, where the endsequent $\Gamma \Rightarrow \varphi$ in a proof expresses the fact that φ is derived from the (multi)set of open assumptions Γ. In particular, if $\Gamma = \varnothing$, then it shows that all assumptions were discharged in the course of derivation. Hence this way of looking at hypotheses in SC corresponds to the variant of placeholder view where assumptions should be discharged.

What with the second variant of placeholder view in which the assumptions are substituted by their proofs? It may be expressed in two rather different ways:

1. Hypotheses are expressed by additional topsequents $\Rightarrow \varphi$.
2. Hypotheses are added as a context to antecedents of (all/some) topsequents.

Simple example will serve to make clear a difference. Let us consider one hypothesis φ to be eliminated by substitution. In both versions hypotheses are eliminated by providing their proofs (composition of proofs), so we assume that we have a proof of this hypothesis:

$$\frac{\mathsf{D}_1}{\Rightarrow \varphi}$$

In the first version a proof based on the hypothesis φ looks like that:

$$\frac{\frac{\ldots \quad \Rightarrow \varphi \quad \ldots}{\mathsf{D}_2}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

and we can compose both proofs:

$$\frac{\frac{\frac{\mathsf{D}_1}{\ldots \quad \Rightarrow \varphi \quad \ldots}}{\mathsf{D}_2}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

In the second version we can eliminate the hypothesis φ by cut with the antecedent of endsequent.

$$(\mathsf{Cut})\ \frac{\dfrac{\mathsf{D}_1}{\Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\ldots \quad \varphi, \psi \Rightarrow \psi \quad \ldots}{\mathsf{D}_2}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

In both variants $\Rightarrow$ is still interpreted as $\vdash$. Apparently, the second variant is worse, since it explicitly applies cut. This is in contrast to formalization of theories obtained in the same way in Gentzen [8]. In that approach axioms of given theory used to prove a thesis are collected in the antecedent. Gentzen has shown that in this approach a proof of cut elimination is saved. But this is because axioms remain intact in the endsequent, whereas hypotheses should be eliminated and this is performed by the application of cut.

On the other hand, in the first variant it seems that cut is not necessary, since the elimination of (proved) hypotheses is obtained by composition

of proofs. But it is not true. Consider two assumptions of the form $\Rightarrow \varphi$ and $\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$. Then the situation is exactly the same as in the case of the simple treatment of formal theories, where cut is not fully eliminable.

Note that both ways of expressing elimination of hypotheses by substitution are syntactically equivalent to two possibile ways of formalizing theories in SC, either by treating axioms as additional primitive sequents of the form $\Rightarrow \varphi$ or by keeping them in the antecedent of the proven sequent. What is even more striking is that in each case hypotheses are expressed in different way, either as axiomatic sequents $\varphi \Rightarrow \varphi$ (elimination by discharge), or as additional primitive sequents $\Rightarrow \varphi$, or as elements of the antecedent. The approach with $\Rightarrow \varphi$ as additional topsequent also may express the no-assumption view. Also the reading of $\Rightarrow$ as $\rightarrow$ (Gentzen [7]) is of this kind. If we take $\vdash \subseteq \mathrm{P}(Seq) \times Seq$, then $\varphi \Rightarrow \varphi$ cannot be interpreted as hypotheses since they express trivial validities. Assumptions may be expressed by other topsequents (again, in particular by $\Rightarrow \varphi$ but also by other ones; again we interpret $\Rightarrow$ as $\rightarrow$) or by rules.

As we noted, Schroeder-Heister considers only bidirectional view of hypotheses as inherently connected with SC. The key point is that in SC logical rules are defined both for the antecedent and succedent of a sequent. If we treat elements of the antecedent as the record of hypotheses which are in force (i.e. neither discharged nor substituted), then in the placeholder view nothing can be made with them just because they are treated as placeholders only. This is reflected in ND systems in the sequential form where all logical rules affect only formulae in the succedents. By contrast, in SC logical rules operate not only on the inferred consequences of hypotheses but directly on them. As Schroeder-Heister put it "Therefore, from a philosophical point of view, the sequent calculus presents a model of bidirectional reasoning, that is, of reasoning that, by means of right-introduction rules, extends a proof downwards, and, by means of left-introduction rules, extends a proof upwards." This is another evidence for the richness of SC framework which, contrary to the Gentzen's view, represents something genuinely different than ND.

Thus we can observe that in both cases of formal theories and hypothetical reasoning, transferring the discussion into the general setting of SC allow us to observe deep technical coincidence, despite of the radically different motivation of both phenomena. In general, in both cases the proper treatment requires the expression of investigated issues (axioms, hypothe-

ses) as a special kind of sequents or rules. But what sequents? What rules? We start with the latter.

5 Rule-generation theorem

One particularly nice solution, due to Negri and von Plato [14], and applied in the context of theory formalization, was mentioned in section 3 and illustrated with the formalization of identity theory. It has the advantage that cut elimination theorem and the generalised subformula property holds for SC with only such rules added. But other solutions are also possible and one can ask how many? In order to put things in a systematic way we apply the following theorem (to increase readability we use „|" as a separator of premisses):

Theorem 3 (Rule-generation). *For any sequent* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *with* $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ *and* $\Delta = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}, k \geqslant 0, n \geqslant 0, k + n \geqslant 1$, *there are* $2^{k+n} - 1$ *interderivable rules captured by the general schema:*

$$\frac{\Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1, \varphi_1 \,|...|\, \Pi_i \Rightarrow \Sigma_i, \varphi_i \mid \psi_1, \Pi_{i+1} \Rightarrow \Sigma_{i+1} \,|...|\, \psi_j, \Pi_{i+j} \Rightarrow \Sigma_{i+j}}{\Gamma^{-i}, \Pi_1, ..., \Pi_i, \Pi_{i+1}, ..., \Pi_{i+j} \Rightarrow \Sigma_1, ..., \Sigma_i, \Sigma_{i+1}, ..., \Sigma_{i+j}, \Delta^{-j}}$$

where $\Gamma^{-i} = \Gamma - \{\varphi_1, \ldots, \varphi_i\}$ *and* $\Delta^{-j} = \Delta - \{\psi_1, \ldots, \psi_j\}$ *for* $0 \leqslant i \leqslant k,\ 0 \leqslant j \leqslant n$.

The proof of this convenient theorem may be found in [11] and it should be underlined that it requires only applications of axiom $\varphi \Rightarrow \varphi$ and cut (in fact, cut is only necessary when proving that n-premiss rule is derivable from k-premiss rule, $0 \leqslant k < n$), so it holds not only for classical logic. Although its formulation may seem not to be very readable, its intuitive sense is quite straightforward. Informally, it shows that for any sequent we can provide different rules which are interderivable with it. Premisses of these rules are obtained either by deleting some formula from the antecedent of the respective sequent and putting it in the succedent (of respective premiss), or conversely, by deleting a formula in the succedent and putting it into the antecedent of a premiss. The conclusion of such a rule is provided by what remains intact in the input sequent. Let us illustrate what we can obtain from modus ponens (MP) formulated as a sequent: (1)

$\varphi, \varphi \to \psi \Rightarrow \psi$:

$$(2)\ \frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (3)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}$$

$$(4)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi} \qquad (5)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \to \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi}$$

$$(6)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad (7)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi \quad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$(8)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \to \psi \quad \psi, \Lambda \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Theta}$$

Note that (4) is just a converse of the deduction theorem (DT); this explains why implication can be characterised just by one double sound rule mixing MP and DT. (5) is just MP stated as a proof rule, not an inference rule like in (1). (6) is just an ordinary antecedent introduction rule of SC. (7) can be seen as a formulation of modus tollens (MT) as a proof rule. The remaining ones may seem artificial but the feeling of artificiality or naturalness for such rules depends mainly on the context. For example, if we apply the rule-generation theorem in the setting of tableau system, the counterparts of (2) and (3) are:

$$(2')\ \frac{\Gamma, \varphi, \varphi \to \psi}{\Gamma, \psi} \qquad (3')\ \frac{\Gamma, \varphi \to \psi, \neg\psi}{\Gamma, \neg\varphi}$$

which correspond naturally to MP and MT. On the other hand, counterparts of (5) and (7), which were naturally interpreted in SC as proof formulations of traditional MP and MT rules, in the tableau setting are rather unnatural:

$$(5')\ \frac{\Gamma, \neg\psi}{\Gamma, \neg\varphi \mid \Gamma, \neg(\varphi \to \psi)} \qquad (7')\ \frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \psi \mid \Gamma, \neg(\varphi \to \psi)}$$

The variety of forms is fine but not all of them have nice proof-theoretic features. In particular, not all solutions yield cut elimination theorem and provide the subformula property. One-sided approach due to Negri and von Plato, based on the application of rules with all active formulae put in the antecedents, works nicely with Dragalin's strategy of proving cut admissibility for specific version of SC. The disadvantage of this approach is that we must provide numerous preliminary results concerning invertibility of rules, admissibility of contraction e.t.c. Moreover, such kind of rules may seem not necessarily the most natural in many cases.

We have shown (e.g. in [11]) that working with rules having active formulae in the succedents only seem to be more proof-construction directed and with no necessity for proving preliminary results for cut elimination theorem. The strategy of proof of cut elimination which works nicely for such a solution is based on the approach originally developed by Metcalfe, Olivetti and Gabbay [13] in the framework of hypersequent calculi, a generalised version of SC, particularly useful for non-classical logics. It is based on two lemmata:

Lemma 1 (Right reduction). *Let* $\mathcal{D}_1 \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ *and* $\mathcal{D}_2 \vdash \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma$ *with* $d\mathcal{D}_1, d\mathcal{D}_2 < d\varphi$*, and* φ *principal in* $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$*, then we can construct a proof* $\mathcal{D}$ *such that* $\mathcal{D} \vdash \Gamma^k, \Pi \Rightarrow \Delta^k, \Sigma$ *and* $d\mathcal{D} < d\varphi$.

Lemma 2 (Left reduction). *Let* $\mathcal{D}_1 \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^k$ *and* $\mathcal{D}_2 \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$ *with* $d\mathcal{D}_1, d\mathcal{D}_2 < d\varphi$*, then we can construct a proof* $\mathcal{D}$ *such that* $\mathcal{D} \vdash \Gamma, \Pi^k \Rightarrow \Delta, \Sigma^k$ *and* $d\mathcal{D} < d\varphi$.

In the formulation of the above lemmata $d\varphi$ is a degree of cut formula and dD is a degree of a derivation, which is the maximal degree of cut formula in D.

Since all additional rules have active formulae in the succedents only then the Right reduction lemma goes without any changes. We need only additional work for the Left reduction lemma. From the latter the cut elimination theorem follows.

6 Appropriate sequents

However, the strategies described in the preceding section work without troubles only when suitable rules for nonlogical constants are defined on atomic formulae. Note that rule-generation theorem works for any kind of formulae (which our example with MP nicely illustrated) but if we look for well-behaved rules we need to deal with sequents (1) composed of atomic formulae only, i.e. the ground sequents in the sense of Gentzen. On the other hand, axioms and hypotheses tend to have complex forms. In case of truth-functional compound formulae the problem is not particularly difficult, since all such formulae may be systematically decomposed by means of SC rules. In the tree obtained in such a way all nonaxiomatic but

atomic sequents collectively represent the input sequent. In fact it may be seen as a procedure of obtaining a conjunctive-disjunctive normal form of the input formula under I_D interpretation of sequents. But what to do with quantified statements?

One may easily obtain suitable rules for the class of universal implications of the form $\forall x_1 \dots x_k(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \dots \vee \psi_m)$, where all φ's and ψ's are atomic formulae. To each such universal implication, the general schema of SC rule in our favourite form will be:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \quad \dots \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_n}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi_1, \dots, \psi_m}$$

Since axioms of many elementary theories can be formulated by means of universal implications it is a result of significant value. Moreover, it may be strenghtened to the wider class of basic geometric formulae of the form:

$$\forall x_1 \dots x_k\big(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \exists y_1 \dots y_l(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_m)\big),$$

where $k \geqslant 1$, $l, n, m \geqslant 0$, φ's are atomic formulae and ψ's are either atomic formulae or finite conjunctions of atoms.

This class may seem to be better treated by other approaches. For example: In Braüner [4] for every such basic geometric formula there corresponds a rule of the following form:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \ \dots \ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_n \quad \Psi_1, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \dots \ \Psi_m, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

where no variables among $y_1, \dots, y_l$ occur in Γ, Δ, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, and for each $i = 1, \dots m$: Ψ_i is a set of atoms that form conjunction ψ_i.

Also in Negri and von Plato approach we can provide suitable rules of the form:

$$\frac{\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n, \Psi_1, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \dots \quad \varphi_1 \ \dots \ \varphi_n, \Psi_m, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

where no variables among $y_1, \dots, y_l$ occur in Γ, Δ, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, and for each $i = 1, \dots m$: Ψ_i is a set of atoms that form conjunction ψ_i.

However, for our preferred format of rules things are harder. Of course, we can use rules of the form:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \quad \dots \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_n}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi_1, \dots, \psi_m}$$

but this time ψ-s may be not atomic and the Right reduction lemma fails in such a case. Fortunately, we may transform every Braüner's rule into finite set of rules of the form:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \quad \ldots \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_n}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi_1, \ldots, \psi_m}$$

where for each $i \leqslant m$, ψ_i is a selected (atomic) element of Ψ_i, for every combination of these atoms.

This way we can also cover any such theory over SC for classical logic with our general cut elimination theorem. As we noted above, complex hypotheses may be treated in the similar way.

References

1. A. Avron. Gentzen-type systems, resolution and tableaux. *Journal of Automated Reasoning*, 10(2):265–281, 1993.
2. A. Avron, and I. Lev. Canonical propositional Gentzen-type systems. In R. Goré, A. Leitsch, and T. Nipkow, editors, *Automated reasoning. Proceedings of* IJCAR'01, volume 2083 of LNCS, pp. 529–543. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
3. J.L. Bell, and M. Machover. *A course in mathematical logic*. North-Holland, Amsterdam, 1977.
4. T. Braüner. *Hybrid logic and its proof-theory*. Springer, Dordrecht, 2011.
5. M. Fitting. *First-order logic and automated theorem proving*. Springer, Berlin, 1996.
6. J.H. Gallier. *Logic for computer science*. Harper and Row, New York, 1986.
7. G. Gentzen. Untersuchungen über das Logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, 39:176–210 and 39:405–431, 1934.
8. G. Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112:493–565, 1936.
9. J. Hintikka. Form and content in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica*, 8:8–55, 1955.
10. A. Indrzejczak. Tautology elimination, cut elimination and S5. *Logic and Logical Philosophy*, 26/4:461–471, 2017.
11. A. Indrzejczak. Rule-generation theorem and its applications. *The Bulletin of the Section of Logic*, 47/4:265–281, 2018.
12. S. Jaśkowski. On the rules of suppositions in formal logic. *Studia Logica*, 1:5–32, 1934.
13. G. Metcalfe, N. Olivetti and D. Gabbay. *Proof theory for fuzzy logics*. Springer, Dordrecht, 2008.
14. S. Negri and J. von Plato. *Structural proof theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

15. S. Negri and J. von Plato. *Proof analysis. A contribution to Hilbert's last problem*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
16. E. Orłowska and J. Golińska-Pilarek. *Dual tableaux: Foundations, methodology, case studies*. Springer, 2011.
17. F. Paoli. *Substructural logics: A primer*. Kluwer, Dordrecht, 2002.
18. F. Poggiolesi. *Gentzen calculi for modal propositional logic*. Springer, 2011.
19. H. Rasiowa and R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*. PWN, Warszawa, 1963.
20. J.A. Robinson. A machine oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 12:23–41, 1965.
21. P. Schroeder-Heister. Open problems in proof-theoretic semantics. In T. Piecha and P. Schroeder-Heister, editors, *Advances in proof-theoretic semantics*, pp. 253–283, Springer, 2016.
22. K. Schütte. *Proof theory*, Springer, Berlin, 1977.
23. A.S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
24. H. Wansing. *Displaying modal logics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

Erotetic calculi for Classical Propositional Logic and reduction to normal forms

Andrzej Wiśniewski

Abstract Some one-sided erotetic calculi for Classical Propositional Logic (hereafter: CPL) enable relatively easy conversions of a CPL-formula into equivalent CPL-formulas in Disjunctive Normal Form (DNF) and in Conjunctive Normal Form (CNF). A practical advantage of the proposed approach is the absence of steps which often lead to mistakes when "standard" conversion procedures are performed by humans, namely applying distributivity rules.

1 Preliminaries

By *wffs* we mean here CPL-formulas; the latter concept is defined in the usual manner. A *literal* is a propositional variable or the negation of a propositional variable. We use the letters A, B, possibly with subscripts, as metalanguage variables for wffs. The letters S, T, again possibly with subscripts, refer to sequences of wffs, the empty sequence included. We use the sign $'$ as the concatenation-sign for sequences of wffs. A metalanguage expression of the form $S\ '\ A$ denotes the concatenation of sequence S and the one-term sequence $\langle A \rangle$, while a metalanguage expression of the form $S\ '\ A\ '\ T$ refers to the concatenation of sequence $S\ '\ A$ and sequence T.

Andrzej Wiśniewski e-mail: Andrzej.Wisniewski@amu.edu.pl
Department of Logic and Cognitive Science, Faculty of Psychology and Cognitive Science, Adam Mickiewicz University in Poznań

We distinguish between α-wffs and β-wffs, according to the following table:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$A \wedge B$	A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	A	B
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$\neg A$	B

We adopt the usual conventions concerning omitting brackets, in particular for DNFs and CNFs.

Let 1 stand for truth and 0 for falsity. A function v from the set of wffs to the set $\{1, 0\}$ is a CPL-*valuation* iff v satisfies the following conditions for any wffs A, B: (a) $v(\neg A) = 1$ iff $v(A) = 0$; (b) $v(A \vee B) = 1$ iff $v(A) = 1$ or $v(B) = 1$; (c) $v(A \wedge B) = 1$ iff $v(A) = 1$ and $v(B) = 1$; (d) $v(A \rightarrow B) = 1$ iff $v(A) = 0$ or $v(B) = 1$; (e) $v(A \leftrightarrow B) = 1$ iff $v(A) = v(B)$. Remark that the domain of a CPL-valuation is the whole set of wffs, and thus a CPL-valuation assigns either truth, 1, or falsity, 0, to each propositional variable.

In what follows we assume that the reader is familiar with the method of Socratic proofs.[1]

2 $\mathbb{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$ and DNF

In this section we consider left-sided erotetic calculus for CPL, resulting from the calculus $\mathbb{E}^{*}_{\mathsf{CPL}}$ (*cf.* [3]) by removing from it the rule R/L. We label the calculus considered by $\mathbb{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$. Rules of $\mathbb{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$ operate on questions which are based on sequences of left-sided sequents. A *left-sided sequent* is an expression of the form:

$$S \vdash \tag{1}$$

where S is a finite non-empty sequence of wffs, characterized by listing its consecutive terms. As for $\mathbb{E}^{*}_{\mathsf{CPL}}$ and, consequently, $\mathbb{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$, a *question* is an expression falling under the schema:

[1] A general introduction to the method can be found in Chapter 8 of [5]. Let me add that there exist many erotetic calculi for CPL and for First-Order Logic. Some non-classical logics (including normal modal propositional logics and intuitionistic propositional logic) have been formalized in the form of erotetic calculi as well. An interested reader is advised to consult, e.g., [1] or [2].

$$?(\Phi) \tag{2}$$

where Φ is a finite non-empty sequence of left-sided sequents.

In what follows, the letters Φ, Ψ will refer to sequences of sequents, and the semicolon, ';', performs the role of the concatenation-sign for sequences of sequents. We omit angle brackets when referring to a one-term sequence of sequents. Note that sequence $\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash \rangle$ can be equivalently displayed as:[2]

$$S_1 \vdash; \ldots; S_m \vdash \tag{3}$$

We will be making use of this possibility below, in particular when displaying questions.

Here are the primary rules of the calculus $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$:

$$\mathrm{E}^{\circledast}_{\alpha}: \quad \frac{?(\Phi;\ S \prime \alpha \prime T \vdash;\ \Psi)}{?(\Phi;\ S \prime \alpha_1 \prime \alpha_2 \prime T \vdash;\ \Psi)}$$

$$\mathrm{E}^{\circledast}_{\beta}: \quad \frac{?(\Phi;\ S \prime \beta \prime T \vdash;\ \Psi)}{?(\Phi;\ S \prime \beta_1 \prime T \vdash;\ S \prime \beta_2 \prime T \vdash;\ \Psi)}$$

$$\mathrm{E}^{\circledast}_{\neg\neg}: \frac{?(\Phi;\ S \prime \neg\neg A \prime T \vdash;\ \Psi)}{?(\Phi;\ S \prime A \prime T \vdash;\ \Psi)}$$

Till the end of this section by a rule we will mean a primary rule of the calculus $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$.

Let us recall:

Definition 1 (Socratic transformation)**.** *A sequence $\langle s_1, s_2, \ldots \rangle$ of questions is a Socratic transformation of a question $?(\Phi)$ via the rules of $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$ iff the following conditions hold:*

1. $s_1 = ?(\Phi)$,
2. s_i, *where* $i > 1$, *results from* s_{i-1} *by an application of a rule of* $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$.

We introduce the following auxiliary concept:

[2] Since $\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash \rangle = \langle S_1 \vdash \rangle; \ldots; \langle S_m \vdash \rangle$, and angle brackets can be omitted in the case of one-term sequences of sequents.

Definition 2 (Dissatisfaction of a left-sided sequent)**.** *A* CPL*-valuation* ν *dissatisfies a sequent* $S \vdash$ *iff* $\nu(A) = 0$ *for some term* A *of* S*; otherwise we say that* ν *satisfies the sequent* $S \vdash$.

Rules of $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$ preserve dissatisfaction of left-sided sequents in both directions. One can prove:

Lemma 1. *Assume that question* $?(\Psi)$ *results from question* $?(\Phi)$ *by a rule of* $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$*. Let* ν *be a* CPL*-valuation. Then* ν *dissatisfies each sequent of* Ψ *iff* ν *dissatisfies each sequent of* Φ.

Proof. By cases. □

Lemma 2. *Let* $\mathfrak{s}$ *be a finite Socratic transformation of a question of the form* $?(A \vdash)$ *via the rules of* $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$*, and let* ν *be a* CPL*-valuation. Then* $\nu(A) = 0$ *iff* ν *dissatisfies each sequent that occurs in the last term/question of* $\mathfrak{s}$.

Proof. By Lemma 1. □

Let us introduce:

Definition 3 (Completed Socratic transformation)**.** *A Socratic transformation of a question via the rules of an erotetic calculus is completed iff the transformation is finite and no rule of the erotetic calculus is applicable to the last term/question of it.*

If A is a literal, then the one-term sequence, $\langle ?(A \vdash)\rangle$, is the only completed Socratic transformation of the question $?(A \vdash)$ via the rules of $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$. If A is not a literal, a completed Socratic transformation of the corresponding question of the form $?(A \vdash)$ via the rules of $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$ has at least two terms. The rules of $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$ are eliminative w.r.t. occurrences of binary propositional connectives and double negations. A Socratic transformation via the rules of $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$ develops by acting upon the question arrived at in the previous step (or upon the initial question in the first step). Thus any Socratic transformation via the rules of $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$ is finite. Moreover, the following holds:

Corollary 1. *For each question of the form* $?(A \vdash)$ *there exists a completed Socratic transformation of the question via the rules of* $\mathrm{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$.

Corollary 2. *Each completed Socratic transformation, via the rules of* $\mathbf{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$*, of a question of the form* $?(\mathsf{A} \vdash)$ *ends with a question having the following property:*

($\heartsuit$) *every sequent that occurs in the last question of the transformation involves only literals.*[3]

We need:

Definition 4. *Let*

$$\langle \mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n \rangle$$

be a finite non-empty sequence of literals.

$$\mathsf{f}(\langle \mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n \rangle) = \begin{cases} \mathsf{B}_1 \textit{ if } n = 1 \\ (\mathsf{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathsf{B}_n) \textit{ if } n > 1 \end{cases}$$

Definition 5. *Let*

$$\langle \mathsf{S}_1 \vdash, \ldots, \mathsf{S}_m \vdash \rangle$$

be a finite non-empty sequence of left-sided sequents such that $\mathsf{S}_1, \ldots, \mathsf{S}_m$ *are non-empty finite sequences of literals.*

$$\mathsf{g}(\langle \mathsf{S}_1 \vdash, \ldots, \mathsf{S}_m \vdash \rangle) = \begin{cases} \mathsf{f}(\mathsf{S}_1) \textit{ if } m = 1 \\ \mathsf{f}(\mathsf{S}_1) \vee \ldots \vee \mathsf{f}(\mathsf{S}_m) \textit{ if } m > 1 \end{cases}$$

The following holds:

Corollary 3. *If*

$$\langle \mathsf{S}_1 \vdash, \ldots, \mathsf{S}_m \vdash \rangle$$

is a finite non-empty sequence of left-sided sequents such that each sequent of the sequence involves only literals, then

$$\mathsf{g}(\langle \mathsf{S}_1 \vdash, \ldots, \mathsf{S}_m \vdash \rangle)$$

is a wff in DNF.

Let us now prove:

[3] More precisely: each wff which is a term of the sequence of wffs that occurs in a sequent is a literal.

Theorem 1. *Let* s *be a completed Socratic transformation of a question of the form* $?(A \vdash)$ *via the rules of* $\mathbb{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$*, and let:*

$$?(S_1 \vdash; \ldots; S_m \vdash) \tag{4}$$

be the last term of s*. The following condition holds:*

– *for each* CPL*-valuation* v*:*

$$v(A) = 1 \textit{ iff } v(\mathsf{g}(\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash\rangle)) = 1.$$

Proof. Recall that

$$S_1 \vdash; \ldots; S_m \vdash$$

equals $\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash\rangle$.

($\Rightarrow$). Assume that $v(A) = 1$. Thus, by Lemma 2, v satisfies some sequent of the sequence:

$$\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash\rangle \tag{5}$$

It follows that for some sequent, $S_k \vdash$, of the sequence (5) we have $\mathsf{f}(S_k \vdash) = 1$ and hence $v(\mathsf{g}(\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash\rangle)) = 1$.

($\Leftarrow$) Assume that $v(\mathsf{g}(\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash\rangle)) = 1$. Hence it is not the case that v dissatisfies all the sequents of the sequence (5). Thus, by Lemma 2, $v(A) \neq 0$. Hence $v(A) = 1$. □

Obviously, the following holds:

Lemma 3. $(A \leftrightarrow B) \in \mathsf{CPL}$ *just in case for each* CPL*-valuation* v*:* $v(A) = 1$ *iff* $v(B) = 1$.

Finally, we get:

Theorem 2. *Let* s *be a completed Socratic transformation of a question of the form* $?(A \vdash)$ *via the rules of* $\mathbb{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$*, and let:*

$$?(S_1 \vdash; \ldots; S_m \vdash)$$

be the last term of s*. Then:*

– $\mathsf{g}(\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash\rangle)$ *is a wff in DNF,*
– $(A \leftrightarrow \mathsf{g}(\langle S_1 \vdash, \ldots, S_m \vdash\rangle)) \in \mathsf{CPL}$.

Proof. By Theorem 1 and Corollary 3. □

Thus in order to convert a CPL-formula, A, into an equivalent formula in DNF it suffices to perform a completed Socratic transformation of the question $?(A \vdash)$ in the erotetic calculus $\mathbb{E}^{\circledast}_{\mathsf{CPL}}$.

Example 1.

$$?((p \to q) \wedge p \to q \vdash)$$

$$?(\neg((p \to q) \wedge p) \vdash; q \vdash)$$

$$?(\neg(p \to q) \vdash; \neg p \vdash; q \vdash)$$

$$?(p, \neg q \vdash; \neg p \vdash; q \vdash)$$

a DNF of $(p \to q) \wedge p \to q$ is:

$$(p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q \tag{6}$$

as

$$p, \neg q \vdash; \neg p \vdash; q \vdash$$

equals

$$\langle p, \neg q \vdash, \neg p \vdash, q \vdash\rangle$$

and $\mathsf{g}(\langle p, \neg q \vdash, \neg p \vdash, q \vdash\rangle)$ is $(p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$.

3 $\mathbb{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$ and CNF

Let us now turn to the right-sided erotetic calculus for CPL (*cf.* [4]), which we will label here $\mathbb{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$. Rules of the system operate on questions based on sequences of right-sided sequents. A *right-sided sequent* has the form:

$$\vdash S \tag{7}$$

where S is a finite non-empty sequence of wffs, again characterized by listing its consecutive terms. As for questions, the presence of right-sided sequents instead of left-sided sequents makes the only difference; all the conventions introduced in the previous sections apply.

Here are the primary rules of the calculus $\mathbb{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$:

$$\mathrm{E}^{**}_{\alpha}: \frac{?(\Phi;\vdash S\,'\,\alpha\,'\,T;\,\Psi)}{?(\Phi;\vdash S\,'\,\alpha_1\,'\,T;\vdash S\,'\,\alpha_2\,'\,T;\,\Psi)}$$

$$\mathrm{E}^{**}_{\beta}: \frac{?(\Phi;\vdash S\,'\,\beta\,'\,T;\,\Psi)}{?(\Phi;\vdash S\,'\,\beta_1\,'\,\beta_2\,'\,T;\,\Psi)}$$

$$\mathrm{E}^{**}_{\neg\neg}: \frac{?(\Phi;\vdash S\,'\,\neg\neg A\,'\,T;\,\Psi)}{?(\Phi;\vdash S\,'\,A\,'\,T;\,\Psi)}$$

In what follows by a rule of $\mathrm{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$ we mean a primary rule of the system. We introduce the following auxiliary concept:

Definition 6 (Satisfaction of a right-sided sequent)**.** *A* CPL*-valuation* v *satisfies a sequent* $\vdash S$ *iff* $v(A) = 1$ *for some term* A *of* S*.*

One can prove:

Lemma 4. *Assume that question* $?(\Psi)$ *results from question* $?(\Phi)$ *by a rule of* $\mathrm{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$*. Let* v *be a* CPL*-valuation. Then* v *satisfies each sequent of* Ψ *iff* v *satisfies each sequent of* Φ*.*

Proof. By cases. □

Thus rules of $\mathrm{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$ preserve satisfaction of right-sided sequents (understood in the sense of Definition 6) in both directions. As a consequence we get:

Lemma 5. *Let* s *be a Socratic transformation of a question of the form* $?(\vdash A)$ *via the rules of* $\mathrm{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$*, and let* v *be a* CPL*-valuation. Then* $v(A) = 1$ *iff* v *satisfies each sequent that occurs in the last question of* s*.*

Proof. By Lemma 4. □

The concept of a completed Socratic transformation of a question of the form $?(\vdash A)$ via the rules of $\mathrm{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$ is defined accordingly. Analogously as before, one can easily prove:

Corollary 4. *For each question of the form* $?(\vdash A)$ *there exists a completed Socratic transformation of the question via the rules of* $\mathrm{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$*.*

Corollary 5. *Each sequent which occurs in the last question of a completed Socratic transformation, via the rules of* $\mathrm{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$*, of a question of the form* $?(\vdash A)$ *involves only literals.*

Let us introduce:

Definition 7. *Let*

$$\langle \mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n \rangle$$

be a finite non-empty sequence of literals.

$$\mathsf{h}(\langle \mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_n \rangle) = \begin{cases} \mathsf{B}_1 \textit{ if } n = 1 \\ (\mathsf{B}_1 \vee \ldots \vee \mathsf{B}_n) \textit{ if } n > 1 \end{cases}$$

Definition 8. *Let*

$$\langle \vdash \mathsf{S}_1, \ldots, \vdash \mathsf{S}_m \rangle$$

be a finite non-empty sequence of right-sided sequents such that $\mathsf{S}_1, \ldots, \mathsf{S}_m$ *are sequences of literals.*

$$\mathsf{k}(\langle \vdash \mathsf{S}_1, \ldots, \vdash \mathsf{S}_m \rangle) = \begin{cases} \mathsf{h}(\mathsf{S}_1) \textit{ if } m = 1 \\ \mathsf{h}(\mathsf{S}_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{h}(\mathsf{S}_m) \textit{ if } m > 1 \end{cases}$$

We get:

Corollary 6. *If*

$$\langle \vdash \mathsf{S}_1, \ldots, \vdash \mathsf{S}_m \rangle$$

is a finite non-empty sequence of right-sided sequents such that each sequent of the sequence involves only literals, then

$$\mathsf{k}(\langle \vdash \mathsf{S}_1, \ldots, \vdash \mathsf{S}_m \rangle)$$

is a wff in CNF.

Our next theorem presents a result, in a sense, parallel to that expressed by Theorem 1:

Theorem 3. *Let* s *be a completed Socratic transformation of a question of the form* $?(\vdash \mathsf{A})$ *via the rules of* $\mathbb{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$*, and let:*

$$?(\vdash \mathsf{S}_1; \ldots; \vdash \mathsf{S}_m) \tag{8}$$

be the last term of s*. The following condition holds:*

– *for each* CPL*-valuation* v*:*

$$v(\mathsf{A}) = 1 \textit{ iff } v(\mathsf{k}(\langle \vdash \mathsf{S}_1, \ldots, \vdash \mathsf{S}_m \rangle)) = 1.$$

Proof. Similar to that of Theorem 1 (we apply Lemma 5 instead of Lemma 2). □

As a consequence we get:

Theorem 4. *Let* s *be a completed Socratic transformation of a question of the form* $?(\vdash A)$ *via the rules of* $\mathbb{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$*, and let:*

$$?(\vdash S_1; \ldots; \vdash S_m)$$

be the last term of s*. Then:*

- $\mathsf{k}(\langle \vdash S_1; \ldots; \vdash S_m \rangle)$ *is a wff in CNF,*
- $(A \leftrightarrow \mathsf{k}(\langle \vdash S_1; \ldots; \vdash S_m \rangle)) \in \mathsf{CPL}$.

Hence in order to find a CNF of a CPL-wff, A, which is not already in CNF it suffices to perform a completed Socratic transformation of the question $?(\vdash A)$ in the erotetic calculus $\mathbb{E}^{**}_{\mathsf{CPL}}$.

Example 2.

$$?(\vdash (p \to q) \wedge p \to q)$$

$$?(\vdash \neg((p \to q) \wedge p), q)$$

$$?(\vdash \neg(p \to q), \neg p, q)$$

$$?(\vdash p, \neg p, q; \vdash \neg q, \neg p, q)$$

Since

$$\vdash p, \neg p, q; \vdash \neg q, \neg p, q$$

is

$$\langle \vdash p, \neg p, q, \vdash \neg q, \neg p, q \rangle$$

and

$$\mathsf{k}(\langle \vdash p, \neg p, q, \vdash \neg q, \neg p, q \rangle)$$

equals

$$(p \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q) \tag{9}$$

formula (9) is a CNF of the wff:

$$(p \to q) \wedge p \to q \tag{10}$$

Acknowledgements. Work on the first version of this paper was supported by funds of the National Science Centre, Poland (DEC-2012/04/A/HS1/00715).

References

1. D. Leszczyńska-Jasion. *From questions to proofs. Between the logic of questions and proof theory*. AMU Faculty of Social Sciences Publishers, Poznań, 2018.
2. D. Leszczyńska-Jasion. *The method of Socratic proofs. From the logic of questions to proof theory*. Springer, 202x.
3. A. Wiśniewski. Socratic proofs. *Journal of Philosophical Logic*, 33:299-326, 2004.
4. A. Wiśniewski. A Right-sided Socratic calculus for classical logic. Research report. Department of Logic and Cognitive Science, Institute of Psychology, Adam Mickiewicz University, Poznań, 2005.
5. A. Wiśniewski. *Questions, inferences, and scenarios*. College Publications, London, 2013.

Dwie dyskursywne metody rozstrzygania ważności trybów tradycyjnego sylogizmu

Anna Pietryga

Streszczenie W pracy przedstawiam dwie dyskursywne metody rozstrzygania ważności trybów tradycyjnego sylogizmu – autorstwa Seweryny Łuszczewskiej-Romahnowej oraz własną.

W pracy przedstawię dwie dyskursywne metody wskazanego typu w dwóch kolejnych częściach tekstu. Są one niezależne od siebie. Wybrano te właśnie, bo obie traktują w specjalny sposób niepustą sumę dwóch podobszarów w diagramie Venna dla trzech zbiorów. Choć dotyczą tych samych rozumowań tradycyjnego rachunku nazw, proszę uprzejmie Czytelnika, aby zauważył różnice w stosowanej przez autorki notacji (zdarzają się one zarówno między różnymi pracami pierwszej autorki, jak i pomiędzy pracami obydwu autorek).

Pierwsza z nich to praca logiczno-matematyczna Seweryny Łuszczewskiej-Romahnowej[1], studentki filozofii u Kazimierza Twardowskiego

Anna Pietryga e-mail: apietryga@uni.opole.pl
Katedra Filozofii, Uniwersytet Opolski

[1] Autorka tak podpisała swój artykuł. Można też stwierdzić, że napisała go Seweryna Maria Łuszczewska z Łuszczewa h. Pierzchała, córka Konrada Łuszczewskiego z Łuszczewa h. Pierzchała, posła I kadencji 1922–27 na sejm II RP, i Antoniny Marii hr. Dzieduszyckiej z Dzieduszyc, h. Sas. Seweryna poślubiła w 1934 Edmuda Ksawerego Romahn, zmarłego w 1943 roku (za: http://www.sejm-wielki.pl/b/psb.26376.1 (dostęp 07.09.2021) i Łuszczewski Konrad [w: 18, s. 405–406] oraz http://ptmts.ath.bielsko.pl/wp-content/uploads/2020/05/filozofia_rev.pdf (dostęp: 15.09.2021).

(który był promotorem jej doktoratu)[2], Kazimierza Ajdukiewicza oraz Romana Ingardena i studentki matematyki u Hugona Steinhausa i Stefana Banacha [10, s. 5]. Jej rozprawa doktorska nosiła tytuł *O wyrażeniach okazjonalnych*. Łuszczewska-Romahnowa obroniła ją w roku 1932 jako jedna z dwudziestu pięciu (!) kobiet, które do wybuchu II wojny światowej uzyskały w Uniwersytecie Jagiellońskim doktoraty w zakresie filozofii ścisłej[3]. W swoim artykule Łuszczewska-Romahnowa zaproponowała analizę oraz uogólnienie metody sprawdzania tzw. „prawdziwości" formuł logicznych logiki tradycyjnej (czyli klasycznego rachunku nazw), w tym również trybów sylogistycznych. W niniejszym artykule przedstawię tę metodę właśnie – i tylko – dla trybów sylogistycznych, pomijając zaproponowane przez Łuszczewską-Romahnową uogólnienia opisanej przez nią metody.

Druga z metod została zaproponowana przez piszącą te słowa. Podobnie jak propozycja Łuszczewskiej, przynosi ogólną metodę sprawdzania słuszności trybów tradycyjnego sylogizmu kategorycznego. Otrzymane przy jej użyciu wyniki są zgodne z tymi, które uzyskujemy dotychczasowymi metodami logiki tradycyjnej i logiki matematycznej – w tym dyskursywnej metody Łuszczewskiej-Romahnowej. Zamysł drugiej metody jest jednak skromniejszy – celem jest zaledwie opis sylogistyki klasycznej w kategoriach rachunku relacji.

1 Propozycja Seweryny Łuszczewskiej-Romahnowej

Zamierzeniem Łuszczewskiej-Romahnowej było przetłumaczenie diagramów Venna na język dyskursywny [7, s. 188][4]. W omawianym artykule autorka przedstawiła „ścisły i ogólny opis tej metody" (tzn. metody diagramów Venna), którą zazwyczaj przedstawia się pokazując na przykładach

[2] Zob. `https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=167529` (dostęp: 10.09.2021).

[3] Zob. [6, s. 223] za: [23, s. 1].

[4] Podobną propozycję, zawierającą negację przynazwową, przedstawił nieco później wrocławski logik Bogusław Iwanuś, który zaproponował nową aksjomatyzację dla logiki klasycznej (czyli sylogistyki) w języku logiki matematycznej. Wśród autorów poprzedzających go swoimi matematycznymi aksjomatyzacjami sylogistyki Iwanuś wymienia I. Thomasa, A. Wedberga oraz C.A. Meredith'a, przy czym odwołuje się do publikacji A.N. Priora [19] (zob. [3, s. 131–132] oraz [4, s. 133]).

sposób jej stosowania. Łuszczewska-Romahnowa również nie wyjaśnia szczegółowo „pewnych ściśle określonych zasad", których „dokładne sformułowanie" „zajęłoby tu zbyt wiele miejsca", „[p]okaż[e] więc tylko na przykładach, jak należy tę operację wykonać" [7, s. 189]. Dyskursywna metoda rozstrzygania, czy dany tryb jest „prawdziwy", czy „fałszywy", jaką przedstawia w swoim artykule, może jej zdaniem zostać uznana za zamierzony przez nią dyskursywny przekład metody diagramów Venna [7, s. 188]. Zapowiedziane w streszczeniu „specjalne" traktowanie niepustej sumy dwóch obszarów nie daje się zauważyć bez zobaczenia zamieszczonej przez nią ilustracji. Otóż Łuszczewska-Romahnowa umieściła wąski prostokąt w poprzek granicy rzeczonych dwóch podzbiorów, co można zobaczyć w wydaniu Springera. Ale oryginalne wydanie pierwszego tomu ukazywało fotografię zadrukowanych pismem maszynowym kartek, które zostały przyciśnięte ciężkim wąskim przedmiotem, który wyglądał jak staroświecka sztabka cyny do lutowania (takie rozpoznanie fotografii uznał w prywatnej rozmowie za możliwie trafne znawca ówczesnych realiów czasopisma Ryszard Wójcicki).

Autorka przedstawia swój pomysł na przykładzie trzech sylogizmów, pierwszym z których jest tryb *disamis* figury trzeciej[5]:

$$\mathrm{MiP} \wedge \mathrm{MaS} \rightarrow \mathrm{SiP} \tag{1}$$

Pierwszym krokiem zaproponowanego przekształcenia jest „operacja pierwsza", która przekształca powyższy literowy zapis średniowieczny w skupiska czterech wielkich liter złożonych z kwantyfikatora i nazw trzech zbiorów MPS w tej właśnie ustalonej kolejności (czyli czteroliterowe, tzw. wyrażenia bazowe EMPS). Otrzymana w ten sposób formuła jest nazywana przez Autorkę redukcją trybu, zgodnie ze średniowieczną tradycją redukowania do czterech tzw. trybów oczywistych pierwszej figury (zob. [21, s. 39], [24, s. 49], por. [17, s. 9]). W zaproponowanym zapisie nie ma znanych współcześnie symboli oznaczających kwantyfikatory lub

[5] Figury sylogizmu to podzbiory zbioru sylogizmów logiki tradycyjnej, czyli jego części. Charakteryzują się one swoistym położeniem trzech terminów sylogizmu (w roli podmiotu albo orzecznika) w jego trzech zdaniach. Figur wyróżnia się cztery, a w każdej z nich – 16 sylogizmów (zob. Jerzy Pogonowski [15, s. 79nn]). Wśród sylogizmów każdej figury znajdują się tzw. *tryby ważne* (nazywane też *poprawnymi* – tak np. [17, s. 8] lub *niezawodnymi* – tak [5, s. 154]), które mają swoje nazwy indywidualne. Łuszczewska kreśli te nazwy małymi literami, choć często bywają rozpoczynane literą wielką, tak np. w: [21, ss. 72nn], [24, s. 50], [25, s. 72] i Jerzy Pogonowski [17, s. 9].

negację, co podnosi atrakcyjność zagadki. Przypomnijmy, że współczesna logika matematyczna, (czyli logika, której język jest bogatszy od języka rachunku zdań właśnie o dwa kwantyfikatory) stosuje dla kwantyfikatora egzystencjalnego znak $\exists$, natomiast dla zaprzeczenia w KRZ znaki $\neg$ lub $\sim$. W artykule Łuszczewskiej-Romahnowej znajdujemy zamiast tych dwóch oznaczeń dwa inne symbole: kwantyfikację egzystencjalną symbolizuje wielka litera E, a negację lub dopełnienie – linia pozioma nad symbolem kwantyfikatora i towarzyszącego mu argumentu lub argumentów[6] [7, s. 193].

$$\{(\mathrm{EMPS} \vee \mathrm{EMP}\overline{\mathrm{S}}) \wedge (\overline{\mathrm{EMP}\overline{\mathrm{S}}} \wedge \overline{\mathrm{EM}\overline{\mathrm{P}}\,\overline{\mathrm{S}}})\} \rightarrow (\mathrm{EMPS} \vee \mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\mathrm{PS}) \quad (1')$$

Na stronie 189 prezentowanego tekstu Łuszczewska-Romahnowa podpowiada nam, jak należy przeczytać zaproponowany przez nią zapis:

> 1‘ należy czytać: jeżeli istnieją takie M, które są P oraz są S, lub istnieją takie M, które są P, a nie są S, oraz nie istnieją takie M, które są P i nie są S, i nie istnieją takie M, które nie są P i nie są S, to istnieją takie M, które są P oraz są S lub istnieją takie nie-M, które są P oraz są S.

Przykład drugi dotyczy trybu *celarent* z figury I.

$$\mathrm{MeP} \wedge \mathrm{SaM} \rightarrow \mathrm{SeP} \quad (2)$$

$$\{(\overline{\mathrm{EMPS}} \wedge \overline{\mathrm{EMP}\overline{\mathrm{S}}}) \wedge (\overline{\mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\mathrm{PS}} \wedge \overline{\mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{P}}\mathrm{S}})\} \rightarrow (\mathrm{EMPS} \wedge \mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\mathrm{PS}) \quad (2')$$

Możemy przeczytać zapis Łuszczewskiej w następujący sposób:

> 2’: Jeżeli zarówno nie istnieją takie M, które są P oraz są S oraz nie istnieją M, które są P i nie są S, a także nie istnieją takie nie-M, które są P i są S i nie istnieją takie nie-M, które nie są P, a są S, to istnieją takie M, które są P i są S oraz istnieją takie nie-M, które są P i są S.

Natomiast przykład trzeci to tryb bez średniowiecznej nazwy własnej, czyli tryb, który nie należy do trybów słusznych. Nie mamy zatem gwarancji, że prawdziwość jego przesłanek gwarantuje prawdziwość wniosku

[6] Pamiętajmy, że artykuł został wydany w Polsce Ludowej w 1953 roku i że niewątpliwie ani jego Autorka, ani wydawca czasopisma „Studia Logica” nie dysponował wtedy sprawnym komputerem. Zainteresowany Czytelnik znajdzie zestawienie rozmaitych oznaczeń stosowanych w KRZ na stronie 13 pierwszej części „Logiki Matematycznej” Andrzeja Mostowskiego. Widać z niego, że pozioma linia używana przez Łuszczewską to znak negacji u Davida Hilberta. O kwantyfikatorach i ich zasięgu zob. np. [15, s. 8 i 11], [1, s. 89], promotorem doktoratu którego była Seweryna Łuszczewska-Romahnowa, [11, ss. 54–57], Tadeusz Batóg był promotorem rozprawy doktorskiej Kazimierza Świrydowicza *O kwantyfikatorach uogólnionych*.

(por. [21, s. 24]). Układ terminu średniego jest taki jak w drugiej figurze sylogizmu.

$$\mathrm{PoM} \wedge \mathrm{SaM} \rightarrow \mathrm{SoP} \tag{3}$$

$$\{(\mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\mathrm{PS} \vee \mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\mathrm{P}\overline{\mathrm{S}}) \wedge (\overline{\mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\mathrm{PS}} \vee \overline{\mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{P}}\mathrm{S}})\} \rightarrow (\mathrm{EM}\overline{\mathrm{P}}\mathrm{S} \vee \mathrm{E}\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{P}}\mathrm{S}) \tag{3'}$$

Czytamy formułę 3' jak następuje:

> 3': Jeżeli istnieją takie nie-M, które są P i są S lub istnieją takie nie-M, które są P, a nie są S, oraz nie istnieją nie-M, które są P oraz są S, lub nie istnieje takie nie-M, które nie jest P, a jest S, to istnieje takie M, które nie jest P, a jest S lub istnieje takie nie-M, które nie jest P, a jest S.

2 Jak rozpoznać tryby tautologiczne?

Drugi krok to operacja mająca doprowadzić do stwierdzenia, czy dany tryb sylogistyczny jest trybem „prawdziwym" czy „fałszywym"[7]. Określenia te są wzięte w cudzysłów, ponieważ na gruncie tak logiki zdań, jak i logiki matematycznej prawdziwość i fałszywość[8] przysługują jedynie zdaniom oznajmującym, podczas gdy tryby sylogistyczne to zaledwie funkcje zdaniowe[9], domagające się czegoś, co jest ich uzupełnieniem, czyli zdań będących ich argumentami.

Właśnie uszczegółowienie kryterium „prawdziwości" to zadanie, które stawia sobie Łuszczewska-Romahnowa przed wykonaniem w swoim artykule drugiego kroku. Otóż niektóre tryby sylogistyczne, jak pisze, bywają przez niektórych czasami uznawane za „fałszywe". Dotyczy to trybów *darapti*, *bamalip* itp. trybów osłabionych[10].

---

[7] Specjaliści od sylogistyki używają czasami określenia „tryb ważny", dla trybów, w których prawdziwość przesłanek stanowi gwarancję prawdziwości wniosku – zob. np. [21, s. 24].

[8] Czytelnik chcący sobie przypomnieć kwestie związane z wartościami logicznymi skorzystać może z lektury prac [15, s. 18–20] i [12].

[9] Por. np. [8, s. 5], [10, s. 10–12]. Jerzy Pogonowski w [16, ss. 7 i 46nn] ukazuje wyjątkowe własności spójników kwadratu logicznego na tle innych kwantyfikatorów uogólnionych [16, s. 31], por. [9]. W [16, s. 34] Pogonowski zaznacza, jakie własności kwantyfikatorów uogólnionych przy tym zakłada.

[10] Jak nietrudno się domyślić, tym czymś, co odróżnia od siebie dwie grupy sylogizmów klasycznych, jest (nie)pustość ich terminów. Była ona zakładana przez Arystotelesa, ale sylogistyka tradycyjna powstała już po jego śmierci. Uczeni, którzy ją opracowywali, szczegóły przekształceń jednych trybów w inne ukryli w nazwach własnych trybów

Dlatego Łuszczewska-Romahnowa wprowadza cztery nowe terminy regulujące tę kwestię [7, ss. 189–190][11]:

Definicja 1. *Tryb sylogistyczny* T *jest* tautologiczny *(prawdziwy w tym znaczeniu, przy którym* darapti, bamalip *itd. nie są „prawdziwe") wtedy i tylko wtedy, gdy każde zdanie, które otrzymamy z* T *zastępując w* T *terminy* S, P, M *przez dowolne nazwy, jest prawdziwe.*

Definicja 2. *Tryb sylogistyczny* T sprawdza się w zakresie nazw niepustych *(jest prawdziwy w znaczeniu drugim, przy którym* darapti, bamalip *itd. są „prawdziwe") wtedy i tylko wtedy, gdy każde zdanie, które otrzymamy z* T *zastępując w* T *terminy* S, P, M *przez dowolne nazwy niepuste, jest prawdziwe".*

Pozostałe tryby (tryby zawodne) dla nazw dowolnych są określane przez Łuszczewską-Romahnową jako *nietautologiczne*, a dla nazw niepustych – jako te, które *nie sprawdzają się w zakresie nazw niepustych*.

Przygotowana w opisany wyżej sposób operacja druga polega na sprawdzeniu, czy wszystkie podstawienia wartości logicznych za wyrażenia bazowe dają wartość 1. Jeżeli tak jest, tryb należy uznać za tautologiczny.

Łuszczewska-Romahnowa formułuje następujące twierdzenie, którego dowód przedstawia w zarysie pod koniec tekstu:

Twierdzenie 1. *Operacja pierwsza przekształca wszystkie tryby tautologiczne i tylko takie tryby w formuły będące podstawieniami tautologii rachunku zdań. [7, s. 190].*

Twierdzenie drugie dotyczy trybów sprawdzających się w zakresie nazw niepustych:

Twierdzenie 2. *Tryb* T *sprawdza się w zakresie nazw niepustych wtedy i tylko wtedy, jeżeli równą* 1 *jest każda formuła, którą otrzymamy z redukcji* T *zastępując w* T *każde z wyrażeń bazowych przez jedną z cyfr:* 0, 1 *– w dowolny sposób, z tym tylko zastrzeżeniem, że:*

ważnych. W rozważanym przypadku trzeba mieć na uwadze, że litera *p* w nazwie trybu sygnalizuje konwersję *conversio per accidens*, czyli zamianę podmiotu i orzecznika miejscami i zmianę odpowiedniego zdania ogólnego na szczegółowe w celu osiągnięcia trybu figury pierwszej, do której ten tryb redukuje się; w takich przypadkach stosuje się założenie egzystencjalne o niepustości danego zbioru (por. [21, s. 73], Pogonowski: [17, ss. 11–12], [17, s. 9]) oraz – na temat warunku odpowiadającego założeniu *existential import* – Pogonowski w [17, s. 4].

[11] Warto zauważyć, że podając kolejność nazw w definicjach, autorka odwraca szyk, jaki stosuje w zapisie wyrażeń bazowych.

jeżeli dla pewnego spośród terminów: M, P, S, *w skład redukcji* T *wchodzą wszystkie te wyrażenia bazowe, w których ten termin występuje bez nadpisanej nad nim kreski, to przynajmniej jedno z tych wyrażeń zastąpimy przez* 1.
[7, s. 191]

Okazuje się, że wszystkie tryby osłabione okazują się trybami sprawdzającymi się w zakresie nazw niepustych. Ponadto sprawdza się w tym zakresie również każdy tryb tautologiczny. [7, s. 191]

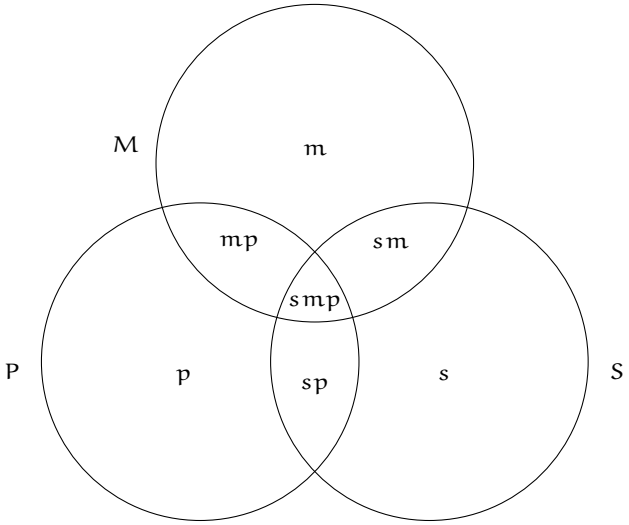
Autorka wyraża przekonanie, że „operację pierwszą w połączeniu z operacją wyznaczoną przez T. 1. [*Twierdzenie 1*] można uważać za dyskursywny odpowiednik metody rozstrzygania przy pomocy diagramu Venna, czy dany tryb jest, czy nie jest tautologiczny".

3 Propozycja Anny Pietrygi

Drugą dyskursywną metodą rozstrzygania ważności trybów sylogistycznych jest moje własne tłumaczenie diagramów Venna na dyskursywny język teorii relacji [por. 13]. Wprowadzam trzy nowe relacje, oznaczane (za: [20, 21, 22]) małymi greckimi literami. Relacje te dotyczą za każdym razem stosunków zakresowych pomiędzy dwoma z trzech zbiorów stanowiących temat sylogistyki. Litery greckie, jakich używam do ich oznaczania, to o (omikron), π (pi) oraz ρ (rho). Oznaczane przez nie stosunki dotyczą gwarantowanej przez jedną lub dwie przesłanki niepustości sumy podobszarów diagramu Venna i zachodzą zawsze w obrębie jednego zbioru. *Omikron* (o) to relacja pomiędzy czterema obszarami jednego zbioru (założona niepustość zbiorów M, P, S). *Pi* (π) to relacja pomiędzy trzema z nich, gdy o czwartym wiemy z przesłanki, że jest pusty. *Rho* (ρ) dotyczy dwóch podobszarów, gdy wiemy o dwóch pozostałych, że nie zawierają żadnego elementu. Warunki poprawności formuł sylogistycznych są w tym zapisie następujące (małe litery s,m,p oznaczają przynależność podobszaru do – odpowiednio – zbiorów M, P, S, zgodnie z ilustracją na Rys. 1; definicje obszarów podane są również niżej):

$\mathrm{SaP} : \mathrm{s} = \mathrm{sm} = \varnothing \ \mathrm{i} \ \rho(\mathrm{sp}, \mathrm{smp})$

$\mathrm{SeP} : \mathrm{sp} = \mathrm{smp} = \varnothing \ \mathrm{i} \ \rho(\mathrm{s}, \mathrm{sm}) \ \mathrm{i} \ \rho(\mathrm{p}, \mathrm{mp})$



Rysunek 1. Podobszary m, p, s

$SiP : \rho(sp, smp)$
$SoP : \rho(s, sm)\ \mathrm{i}\ o(sp, p, smp, mp)$, gdzie
$m = M - (S \cup P),\ p = P - (S \cup M),\ s = S - (M \cup P)$
$sm = (S \cap M) - P,\ sp = (S \cap P) - M,\ mp = (M \cap P) - S$
$smp = S \cap M \cap P$

W zarysowanej tu skrótowo konwencji przedstawię teraz trzy tryby, wybrane przez Łuszczewską-Romahnową, podając mój własny dyskursywny zapis literowy. Dla ułatwienia lektury współczesnemu Czytelnikowi podaję dodatkowo zapis logiczny omawianych formuł w Klasycznym Rachunku Predykatów (za: Jerzy Pogonowski, [4, s. 65]). Kolejność liter w moim zapisie jest inna niż u Łuszczewskiej: to smp. Zapis mój podaję z podwójnym apostrofem po numerze formuły. Poniżej każdej dodaję (z potrójnym apostrofem po numerze formuły) zapis danej formuły we współcześnie używanym języku klasycznego rachunku predykatów.

$$MiP \wedge MaS \rightarrow SiP \tag{1}$$

$$\rho(smp, mp) \wedge \rho(smp, sm) \wedge s = sp = \varnothing \rightarrow$$
$$\rightarrow \rho(smp, mp) \wedge \rho(smp, sm) \wedge s = sp = \varnothing \quad (1'')$$

$$\exists x(M(x) \wedge P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge P(x)) \quad (1''')$$

$$MeP \wedge SaM \rightarrow SeP \quad (2)$$

$$\rho(sp, p) \wedge \rho(sm, m) \wedge (smp = mp = \varnothing) \wedge$$
$$\wedge \rho(smp, sm) \wedge (s = sp = \varnothing) \rightarrow$$
$$\rightarrow (smp = mp = sp = s = \varnothing) \wedge (sm \neq \varnothing) \wedge (p \neq \varnothing) \quad (2'')$$

$$\neg\exists x(M(x) \wedge P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow \neg\exists x(S(x) \wedge P(x)) \quad (2''')$$

$$PoM \wedge SaM \rightarrow SoP \quad (3)$$

$$o(smp, sm, mp, m) \wedge \rho(sp, p) \wedge \rho(smp, sm) \wedge (s = sp = \varnothing) \rightarrow$$
$$\rightarrow \rho(smp, sm) \wedge (s = sp = \varnothing) \wedge (p \neq \varnothing) \quad (3'')$$

$$\neg\forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \rightarrow \neg\forall x(S(x) \rightarrow P(x)) \quad (3''')$$

4 Podsumowanie

W artykule przedstawiono dwie metody dyskursywne rozstrzygania ważności trybów tradycyjnego sylogizmu i uzyskano przy ich wykorzystaniu identyczne wyniki, bez rysowania diagramów Venna dla trzech zbiorów.

Plurimos annos, Panie Profesorze!

Literatura

1. T. Batóg. *Podstawy logiki*. UAM, Poznań, 1986.
2. D. Hilbert i P. Bernays. Grundlagen der Mathematik. Tom 1. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1934.
3. B. Iwanuś. Remarks about syllogistic with negative terms. *Studia Logica*, 24:131–141, 1969.

4. B. Iwanuś. Proof of decidability of the traditional calculus of names. *Studia Logica*, 32:131–147, 1973.
5. M. Lechniak. *Elementy logiki dla prawników*. Wydawnictwo KUL, Lublin, 2006.
6. D. Łukasiewicz. i R. Mordarski, redakcja. *Kobiety w szkole lwowsko-warszawskiej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz 2016.
7. S. Łuszczewska-Romahnowa. Analiza i uogólnienie metody sprawdzania formuł logicznych przy pomocy diagramów Venna (The analysis and generalization of the Method for Checking the Logical Formulas by using Venn diagrams). *Studia Logica*, 1:185–246, 1953.
8. A. Mostowski. *Logika matematyczna*. Druk Uniwersytetu i Politechniki we Wrocławiu, Warszawa-Wrocław, 1948.
9. A. Mostowski. On generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicae*, 44:12–36, 1957.
10. R. Murawski i J. Pogonowski. Badania logiczne prowadzone w Uniwersytecie Poznańskim w latach 1945–1955. *Investigationes Linguisticae*, 14:68–77, 2006.
11. R. Murawski i K. Świrydowicz. *Podstawy logiki i teorii mnogości*. Wydawnictwo UAM, Poznań, 2006.
12. A. Pietryga. Wartości logiczne. W S. Janeczek, A. Starościc i M. Tkaczyk, redakcja, *Logika. Cz.1, Natura logiki*, ss. 237–259, Wydawnictwo Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin, 2018.
13. A. Pietryga. Relacje rotalne jako czynnik w rozstrzyganiu ważności wybranych trybów pierwszej figury tradycyjnego sylogizmu. *Principia. Pisma koncepcyjne z filozofii i socjologii teoretycznej*, 67, 2020.
14. J. Pogonowski. Logika współczesna (5): Semiotyka logiczna, `logic.amu.edu.pl/images/1/18/5wykladow5.pdf` [dostęp:01.09.2021].
15. J. Pogonowski. Logika radosna 4. Semantyka KRP, `http://logic.amu.edu.pl/images/a/ad/Logikaradosna04.pdf` [dostęp:01.09.2021].
16. J. Pogonowski i J. Smigierska. *Uogólnione kwantyfikatory*. 2008. `https://logic.amu.edu.pl/images/6/6d/Metalogikaopolegq.pdf` [dostęp: 30.08.2021].
17. J. Pogonowski. *Uogólnione kwantyfikatory a sylogistyka*. 2010. [Zbiory własne autorki].
18. *Posłowie i senatorowie Rzeczypospolitej Polskiej 1919-1939: słownik biograficzny*. Tom 3, K-Ł, opracowanie P. Majewski, redakcja naukowa G. Mazur, Kancelaria Sejmu, Biblioteka sejmowa, Warszawa, 2005.
19. A.N. Prior. *Formal logic*. Clarendon Press, Oxford, 1962.
20. W. Suchoń. *Stosunki zakresowe*. Dialogikon, Kraków, 1996. `http://www.sejm-wielki.pl/b/psb.26376.1` [dostęp: 07.09.2021].
21. W. Suchoń. *Sylogistyki klasyczne. Podręcznik z ćwiczeniami komputerowymi*. Universitas, Kraków, 1999.
22. W. Suchoń. A paradigm for generating the universe of syllogistic systems. W W. Suchoń, M. Wesoły i E. Żarnecka-Biały, redakcja, *Three studies in Aristotelian semantics*, ss. 113–189, Dialogikon Jagiellonian University Press, Kraków, 2003.
23. *Top 10 – przedwojenne myślicielki w Polsce*. `http://ptmts.ath.bielsko.pl/wp-content/uploads/2020/05/filozofia_rev.pdf` [dostęp: 10.09.2021].
24. M. Wesoły. An analytic insight into Aristotle's logic. W W. Suchoń, M. Wesoły i E. Żarnecka-Biały, redakcja, *Three studies in Aristotelian semantics*, ss. 13–63, Dialogikon Jagiellonian University Press, Kraków, 2003.

25. E. Żarnecka-Biały. The ways of syllogistic evidence in Aristotle. W W. Suchoń, M. Wesoły i E. Żarnecka-Biały, redakcja, *Three studies in Aristotelian semantics*, ss. 65–98, Dialogikon Jagiellonian University Press, Kraków, 2003.

Language and concepts. From linear to structural concepts

Janusz Kaczmarek

Abstract In this paper I want to compare a concept in a linear sense with a concept in a structural sense. The former has been known since ancient times, the latter is also known, but was not always conscious. The key thesis of the paper is the following: concepts, i.e. the meaning of linguistic expressions, should be built according to the knowledge about objects, i.e. according to the ontology which is accepted by representatives of detailed sciences, philosophy or semiotics. I will show that concepts in the structural sense are nowadays natural concepts for science or philosophy.

1 A linear approach to a concept

In the Middle Ages, philosophers defined a concept as a sign or image of an object in the human soul. I will understand the concept of a concept here as it was proposed in analytical philosophy in the 20th century: a concept is the meaning of a linguistic expression. More precisely, if I want to define the concept of man, I determine the meaning of the term (man) whose designata are individual people (Socrates, Plato or the present queen of Great Britain).

Janusz Kaczmarek e-mail: janusz.kaczmarek@uni.lodz.pl
Department of Logic and Methodology of Science, University of Lodz

In accordance with the general division of language expressions into names, sentences and functors, we can build concepts not only of names, but also of sentences or functors. The meaning of a sentence is usually called a proposition, but in the case of functors (and there are many types of them) we do not have a fixed terminology for the appropriate meanings. We are simply talking about meanings of e.g. adjectives, conjunctions, verbs, etc. For example, Ajdukiewicz identified the meaning of the connective "and" with its logical matrix which is known from elementary lectures of logic.

But let us return to the classical examples of concepts for names. We do it most often as in the following examples:

1. Man is a rational animal.
2. Man is a material, living, sensual and rational substance.
3. An even number is (a) a natural number and (b) is divided by two.

It is a classic way of defining, in which we point to a superior genus (kind) and then list the so-called species feature (in other words: we introduce a concept through a classical definition i.e. *per genus et differentiam specificam* or *definitio fit per genus et differentiam specificam*).

Such definitions have been used since antiquity. At the same time, it is worth noting that the classical definition was supposed to capture the so-called essence (or essential properties) of the things that are within the scope of the name that stands in the definition. However, this scheme remained in use even when it was realized that it was not defining the essence of the matter, but the meaning of a name (a linguistic expression). This was already realized by Plato when he considered the definition:

4. Man is an unfeathered biped.

Plato, who knew both definition (1) and definition (4), was aware that both definitions define the content of the term "man" but one of them at most could accurately indicate the essence of the thing – because the essence of a given thing is one, in this case eidos-man.

What is important in this type of definitions is the fact that the definition indicates the characteristics of each object falling under the definiendum. For example, according to definition (2), we can say about every human being: he is a substance, he is alive, etc., etc. It is similar in the case of the school definition of square or sphere. We speak, for example [10, p. 1022]:

5. square – is a shape with four straight equal sides forming four right angles,

and this means that any square is four-sided, quadrangle, and so on.

This conviction was reinforced by J. S. Mill, who built a so-called connotational theory of meaning. He believed that a concept (e.g. of a human) is a bundle of features (i.e. so-called constitutive features) to which every human being is entitled. I will call the approach described above, both Plato's and Mill's, a linear concept approach (cf. [4]). Why? Because in this type of defining a name we point to a series of features (or properties) that all the designators (or designata) of a given name have. It can be assumed that Aristotle played a great role in such an approach to the concept when in his science of categories he distinguished the category of the first substance and nine categories of accidents which are predicated on the first substance.

2 A structural understanding of a concept. Preliminaries

It turns out, however, that we often build definitions of meanings for names in a different way. We point out, for example, the features that not only the designata of a given name are assigned to, but also the features that belong to certain parts of the designata or the relations between the elements of the designata. Such a situation is encountered, among others, in a simple definition [10, p. 68]:

6. ballade – is a poem with usually three groups of lines and a shorter fourth group all having the same last line and using a very small number of rhymes,

We have here examples of properties of ballads (is a poem) but also properties of groups of lines (shorter) and their arrangement (relations between the groups). In the next section we will show more appropriate examples. Concepts defined in this way will be called structural concepts.

The idea of the structural concept appeared in Ajdukiewicz's article – *Language and meaning*[1]. Ajdukiewicz defines language as a system of signs together with a matrix for this language. The matrix consists of three parts:

[1] Cf. this paper in [1] or [3].

in the first part there are axiomatic rules of meaning (also called axiomatic directives), in the second part there are deductive rules of meaning (deductive directives), and in the third part there are empirical rules of meaning (empirical directives). We should remember that when Ajdukiewicz wrote about language, he meant a system that is clearly characterized by syntactic and meaning rules. However, he did not think about ethnic languages. One can provide an easy (limited) example of such a matrix (in the case of an ethnic language it is impossible):

1. $P(a)$ – axiomatic level,
2. $(R(b) \wedge P(a)) \Rightarrow Q(a, b)$ – deductive level (where $\Rightarrow$ means: if . . . , then accept . . .),
3. $A \Rightarrow R(b)$ – empirical level (for example: accept the sentence $R(b)$ (It is raining) when A (it rains)).

It is easy to see that in situation A and using the axiom $P(a)$ we can deduce $Q(a, b)$ on the basis of the deductive rule. Moreover, if we consider a new expression c such that the axiom $P(c)$ and the deductive rule $(R(b) \wedge P(c)) \Rightarrow Q(c, b)$ are fulfilled, then we will get an example of two expressions: a and c that have the same meaning. Why? This is because a and c meet the same rules and are mutually substitutable. I am not quoting here in detail the definition of meaning according to Ajdukiewicz, but the sense of this definition is expressed in the following words of Ajdukiewicz:

> (. . .) a meaning equals a pair: "equality class, structure".[2]

It should be added that Ajdukiewicz did not emphasize the structural definition of concepts (meanings), but it is visible in the definition of language presented here and in his definition of meaning as such. It is important for the considerations of this paper that Ajdukiewicz proposed a definition of the concept of language, in which he points not only to the properties of the language, but also to the properties of a part of the language (e.g. the properties of deductive or empirical rules). Since language is a complex structure, the concept of language is also structural. Let us move on to more detailed research.

[2] The reader can find the details of the definition of the meaning of expression E in Ajdukiewicz's work *Language and Meaning*.

3 A structural approach to a concept and an ontology

The simple concept of a sphere shows that we encounter non-linear concepts. In an ethnic language we meet a description:

7. solid sphere (or ball) – is a solid figure all points of which are equally or less distant from a centre.

However, the meaning of "solid sphere" is not given precisely above. When we talk about a solid sphere (or about a circle – in mathematics the concept of a solid sphere is basic) we should consider an appropriate metric space and decide whether we consider a sphere on a plane, in space or perhaps in any n-dimensional space. Therefore, depending on the metric (metric space), a sphere can be a set of different points. Figure 1 presents one of the models.

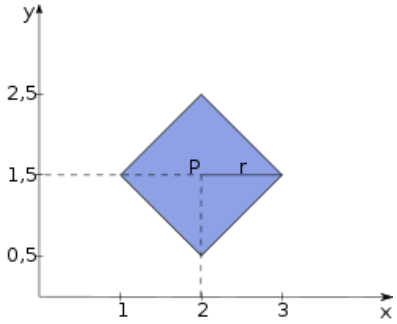


Figure 1. Solid sphere with the centre $P = (2; 1{,}5)$ and radius $r = 1$ in the city metric (in R^2).

It is visible, therefore, that in order to precisely define the concept associated with the term solid sphere, we have to take into account: metric space, the way of defining the metric itself, the dimension of space, the radius. In such a characteristic (definition) we talk not only about the properties that characterize the sphere, but also about the properties that characterize the considered space or radius (e.g. its length). The latter is important because the way of measuring the distance between points can result in a sphere on a plane that "looks" like a square (or other plane

figure). However, the concept of a sphere is precisely described and forces us to abandon the purely sensual approach to designata of a name (in this case: of a solid sphere).

To underline the meaning of a structural concept, let us refer to Whitehead's considerations expressed in his work "Science and the Modern World", first published in 1926. Of course, this does not mean that Ajdukiewicz, when writing his works on meaning in the 1930s, used Whitehead's work (it is rather doubtful). In any case, it is worth noting that both philosophers "sensed" or "felt" the complexity of what we call a concept.

Whitehead introduces the concept of the hierarchy of eternal objects, which he understands as possible forms of objects in our world, i.e. the so-called actual occasions. He introduces the hierarchy of eternal objects as follows.

> An "abstractive hierarchy based upon $\mathfrak{g}$", where $\mathfrak{g}$ is a group of simple eternal objects, is a set of eternal objects which satisfy the following conditions:
>
> (i) the members of $\mathfrak{g}$ belong to it, and are the only simple eternal objects in the hierarchy,
>
> (ii) the components of any complex eternal object in the hierarchy are also members of the hierarchy, and
>
> (iii) any set of eternal objects belonging to the hierarchy, whether all of the same grade or whether differing among themselves as to grade, are jointly among the components or derivative components of at least one eternal object which also belongs to the hierarchy [11, p. 208–209].

Whitehead does not provide adequate examples for a defined hierarchy of eternal objects. The only example we find in the chapter *Abstraction* is the following:

> In the lowest grade of eternal objects are to be placed those objects whose individual essences are simple. This is the grade of zero complexity. Next consider any set of such objects, finite or infinite as to the number of its members. For example, consider the set of three eternal objects A, B, C, of which none is complex. Let us write $R(A, B, C)$ for some definite possible relatedness of A, B, C. To take a simple example, A, B, C may be three definite colours with the spatio-temporal relatedness to each other of three faces of a regular tetrahedron, anywhere at any time. Then $R(A, B, C)$ is another eternal object of the lowest complex grade [11, p. 207].

However, let us give our own examples. Let the group $\mathfrak{g}$ of simple objects consist of one element, namely the empty set $\varnothing$, and let us consider only one relation: the relation of the transition from the elements to the set of these elements, which we write as: $\{\ldots, \ldots, \ldots\}$. This means that e.g.

from elements a, b we create a set of $\{a, b\}$. Then, according to conditions (i)–(iii) given by Whitehead, we can construct the following hierarchy:

1. grade 0: one element – $\varnothing$,
2. grade 1: one element – $\{\varnothing\}$,
3. grade 2: one element – $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
4. grade 3: one element – $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
5. grade 4: etc.

In this way we define a hierarchy of eternal objects, which in the von Neumann's view correspond to the natural numbers: 0, 1, 2, 3, etc., respectively.

Another example. Let the group g consist of simple elements: $\neg$, $\rightarrow$, p, q, r, s, etc. Let us consider only one relationship: bracketed. Then the following objects can appear in the first level: $(\neg p)$, $(q \rightarrow p)$, and on the second level: $((\neg p) \rightarrow (q \rightarrow p))$, etc. We will then get a hierarchy in which eternal objects will appear, defining the formulas of the language of sentential logic. Of course, there will also be other formulas in the hierarchy: formulas that are not well built (e.g. $(q \neg\rightarrow p)$)[3].

Let us underscore that Whitehead's considerations lead us to the following conclusions:

(a) complex eternal objects are created through appropriate relationships on lower-grade objects;

(b) simple or complex objects at different grades of hierarchy have different functions and gives a whole (e.g. a finite hierarchy) of different meanings (as two occurrences of p in $((\neg p) \rightarrow (q \rightarrow p))$ have different functions);

(c) any fragment of the hierarchy, more precisely: any element of the hierarchy together with the elements it binds, can be treated as a concept of a certain actual occasion; in particular, an infinite abstract hierarchy or its infinite fragment (subset) is a fully adequate concept for a given actual occasion.

Whitehead explains Point (c) as follows:

[3] It is worth remembering that in the Whitehead's world of eternal objects there are all possible ideas, while in the real world there are objects that are "realisations" of only some of the eternal objects.

> In any actual occasion α, there will be a group $\mathfrak{g}$ of simple eternal objects which are ingredient in that group in the most concrete mode. This complete ingredience in an occasion, so as to yield the most complete fusion of individual essence with other eternal objects in the formation of the individual emergent occasion, is evidently of its own kind and cannot be defined in terms of anything else. But it has a peculiar characteristic which necessarily attaches to it. This characteristic is that there is an infinite abstractive hierarchy based upon $\mathfrak{g}$ which is such that all its members are equally involved in this complete inclusion in α.
>
> The existence of such an infinite abstractive hierarchy is what is meant by the statement that it is impossible to complete the description of an actual occasion by means of concepts. I will call this infinite abstractive hierarchy which is associated with α "the associated hierarchy of α" [11, p. 211].

Let us also explain that by building complex, structural concepts, we can relate through them to the actual occasions (i.e. objects of the real world) in a more or less precise way. In his metaphysics Whitehead explains this as follows:

> For evidently in describing an actual occasion α, we are nearer to the total concrete fact when we describe α by predicating of it some member of its associated hierarchy, which is of a high grade of complexity. We have then said more about α. Thus, with a high grade of complexity we gain in approach to the full concreteness of α, and with a low grade we lose in this approach [11, p. 212].

I have described here a fragment of Whitehead's metaphysics in more details. This is because it is not an easy philosophy, and in the context of structural terms it is not applied much. However, I believe that Whitehead was fully aware of the complexity of concepts (although perhaps he did not associate them with linguistic expressions) and therefore, apart from the group of simple objects (properties), he considered various relationships that bind both simple and complex objects appearing at the higher grades of the hierarchy. In my opinion, Whitehead has thus sketched out the most general scheme of a structural concept.

We are now prepared to give a stricter definition of the main terms that are being considered here. Let us therefore propose:

Definition 1 (of structural concept). A concept associated with a name N is called structural when:

(i) the ontological structure of the designata of N is taken into account,

(ii) the properties (content) of the designata of N are specified, (and/or)

(iii) the properties of parts or structural fragments of designata of N are indicated, (and/or)

(iv) the relations between the parts and between the parts and the designata are considered.

Definition 2 (of linear concept). A concept associated with a name N is called linear when:

(i) the ontological structure of the designate of N is not included (objects are then treated as simple or homogeneous objects),

(ii) only the property of the designata of the name N is considered.

The reader will easily notice that a concept in the structural sense is more general than the linear one. A concept in a linear sense is a particular case of a structural one.

4 On concepts in formal ontology

In this part, I will present two concepts formulated in the formal ontology: the concept of a complex substance and the concept of a possible world. The first one comes from Leibniz, the second one also comes from Leibniz, it was later considered by many analytical philosophers, and here I will present the concept of a possible world which is a formal representation of a possible world from Wittgenstein's *Tractatus* (cf. [12]).

Let us recall – in a general and not fully formal way – some basic definitions of general topology[4]. Topological space (X, T_X) is a set X together with a family T_X of subsets of the set X that fulfils three conditions:

(a) $\varnothing$ and X (carrier of the topological space) belong to T_X,

(b) any union of sets from T_X belongs to T_X,

(c) the finite intersection of sets from T_X belongs to T_X.

Sometimes we will write shorter T_X instead of (X, T_X). Any set belonging to the family T_X is called an open set, while a closed set is any set B

[4] Detailed definitions of certain notions of general topology and the way they are used in formal ontology and in particular in the so-called topological ontology are presented (among others) in [7] and [8].

whose complement $X - B$ is an open set. An example of a topological space can be a pair: $(X, \{\varnothing, \{0\}, X\})$, where X is e.g. a set of $\{0, 1, 2, 3\}$. The best known example of topology is the so-called natural topology (R, T_N), where R is the set of real numbers and T_N is the family of sets of the forms: open intervals and arbitrary unions of such intervals. In each topology (topological space) an empty set and set X are always both open and closed.

Moreover, the following will be needed for ontological considerations. Different topological spaces can be ordered, and within each space one can distinguish its subspaces. And so we say that space (Y, T_Y) is weaker than space (X, T_X) if and only if family T_Y is included in T_X. We write this relation down formally as: $(Y, T_Y) \leqslant (X, T_X)$. For example, the previously given space $(X, \{\varnothing, \{0\}, X\})$ is weaker than the space $(X, \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}, X\})$. In turn, for any A included in X, we define subspace (A, T_A) as a topology in which family T_A includes all sets of the form $B = A \cap C$, where $C \in T_X$. For example, while considering the natural topology on R and subset (interval) $\langle 0, 1) \subset R$, we can put the subspace topology on the set $\langle 0, 1)$.

It is visible that the relation $\leqslant$ orders all topologies (spaces) on a given set X. A topology called indiscrete is the weakest topology. Its family T_x contains only the empty set $\varnothing$ and the set X. In turn, a topology called discrete is the strongest topology and its family T_x contains all subsets of X.

Let us skip detailed philosophical analysis and say in short: Leibniz understood a compound substance as a group (or set, or an aggregation) of monads with a distinguished dominant monad, hence in [7] I proposed the following definition:

Definition 3 (of a compound substance). Let $D = (X, T_X)$ be a topology (topological space) on X. A set S of topological spaces will be called a substance if the following conditions are fulfilled:

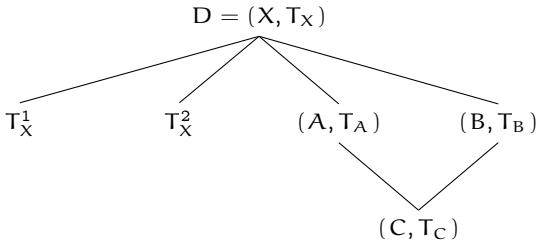
(i) $D \in S$,

(ii) if $M \in S$, then M is a topological subspace of D or $M \leqslant D$.

Topology D is then called a dominant monad.

For Leibniz, a sheep is an example of a complex substance in which the animal soul plays the role of a dominant monad. Both the definition and the Leibniz's approach are structural. A topological example of a sheep –

a complex substance – may be the following configuration (system). Let $D = (X, T_X)$ be the dominant monad and let T^1_X, T^2_X be two topologies weaker than the dominant one and incomparable to each other; moreover, let (A, T_A), (B, T_B), (C, T_C) be topological subspaces of $D = (X, T_X)$ satisfying the conditions $A \subset X$, $B \subset X$ and $C \subset A \cap B$. Then the substance becomes structured as follows[5]:



It is evident that the topologically interpreted concept of sheep has a structural character. For such a depiction it is important not only that a sheep has a dominant monad, but also what are the relationships between, among others, (weaker) monads (in the figure, the weaker ones are those under D). What is more, in topological ontology we can formulate various claims about "our sheep". Let us give, for example, the following three.

(T1) Each monad is a substance (one-element substance; it is then a dominant monad for itself).

(T2) In a substance consisting of many monads, other substances (systems) can be distinguished. For example, the monad system D, (A, T_A), (C, T_C) in a figure is a substance (or subsystem of substances). The system (A, T_A), (C, T_C) is also a substance – a substance in which (A, T_A) is a dominant monad.

(T3) Two substances S_1 and S_2 are identical when they are composed of the same monads. Simply by definition we receive that there is only one dominant monad in each substance.

It should be emphasized that these theses correspond to the relevant theses of Leibniz's monadology. However, for the studies presented in this paper it

[5] Cf. [7], point 4. In this paper you will also find a formal and ontological reasons why we define a substance in the way given here.

is important that we have indicated a characteristic example of a structural concept.

Let us now move on to another example: that of possible world. Polish logician and ontologist B. Wolniewicz proposed that the *Tractatus* ontology should be understood as a theory of lattices. Following in this path, I generalised Wolniewicz's approach (cf. [13, 14]) and in [8] I proposed the following definition of a situations lattice, and consequently a definition of a possible world.

Let $A = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ be a countable family of sets such that for each A_i, $\mathrm{card}(A_i) \geqslant 2$ and for any A_i, A_j, $A_i \cap A_j = \varnothing$. Each A_i is understood as a set of atomic situations and each A_i consists of singletons (i.e. $A_i = \{\{a_{i_1}\}, \{a_{i_2}\}, \{a_{i_3}\}, \ldots\}$). Now let N be the set of natural numbers and let us consider a function $c : N \to \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, such that for each $k \in N$, $c(k) \in A_k$. Then we fix, for a given c:

$$B_c = \{c(k) : k \in N\} \cup \{\varnothing\}.$$

As a result we obtain: a pair (X, T_X), where $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} c(k)$ and for any $A \in T_X$, $A \subseteq B_c$, is a topological space. In [8] I called this topological space Wittgenstein's topological space.

So, now we can say: a union of all Wittgenstein's topologies is a lattice (with $\varnothing$ as an empty situation (0 of a lattice) and $\bigcup(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)$ as λ i.e. 1 of a lattice), where supremum $\underline{\cup}$ and infimum $\underline{\cap}$ is defined in the following way (S_i, S_j are any elementary situations, i.e., each of S_i, S_j belongs to some topology or is λ):

$$S_i \underline{\cup} S_j = \begin{cases} S_i \cup S_j & \text{if } S_i \cup S_j \in T_{A_k}, \text{ for some } k \in \omega \\ \lambda & \text{oth.} \end{cases}$$

$$S_i \underline{\cap} S_j = \begin{cases} S_i \cap S_j & \text{if } S_i \cap S_j \in T_{A_k}, \text{ for some } k \in \omega \\ \varnothing & \text{oth.} \end{cases}$$

In the defined lattice each Wittgenstein's topology plays a role of a possible word and then any Wittgenstein's topology is to be called a possible world.

So as we can see, a possible world is the maximal topology in a lattice. Elements of a given topology are called situations or elementary situations. The concept of a possible world is structural in nature and many theorems about this or that possible world (and also about situations) can be obtained

from the very definition of a possible world. I do not mention these theorems here. An interested reader can find such theorems in the quoted paper [8].

5 Summary notes

In the above analyses I focused on concepts understood as meanings of names. As a future task we can treat considering meanings for sentences and functors. About the meaning of sentences, i.e. about propositions, I wrote, amongst others, in [5]. In the case of functors such as adjectives or verbs (resp. quality and relations on the ontic side) the problem seems difficult. Philosophical and semiotic literature does not provide unambiguous solutions. However, ontological considerations suggest to me that we should move away from a linear understanding of quality. Perhaps there are some simple qualities such as red itself considered by Ingarden as the so-called ideal quality or red understood as the so-called property-trop. Again, let us refer to dictionary terms. We explain the adjective "healthy" in the following way.

8. healthy – physically strong and not often ill; usually in good health [10, p. 485].

This characteristic corresponds to the following definition:

9. health – the state of being well in the body and mind, and free from disease [10, p. 485].

However, this simple linguistic explanation is not precise (the terms used here are vague) and does not stand the test of time. Today it is clear that the state of health of an animal (including humans) is determined by various parameters such as blood pressure, the chemical composition of urine and blood, or the state of kidneys and liver (ultrasound results). And similarly, a simple explanation:

10. atom – the smallest piece of a simple substance (element) that can exist alone or combine with other substances (to form molecules) [10, p. 56].

does not in any way reflect the contemporary physical knowledge, although it does have a certain didactic and introductory function. Philosophers,

not only those analytical, put higher demands on concepts: in language, especially in the language of research, it is necessary to refer to the structure of the studied objects when formulating concepts, and consequently to build structural concepts. As I have shown above, giving such concepts results in a number of theorems about the objects to which we refer by names and concepts connected with names.

Acknowledgements. The paper is supported by National Science Centre, Poland, No 2017/27/B/HS1/02830: Atom. Substance. System. Investigation on topological ontology.

References

1. K. Ajdukiewicz. *Język i poznanie*, tom 1 i 2. (*Language and Cognition*, volumes 1 and 2). PWN, Warszawa, 1960–1965.
2. K. Ajdukiewicz. *Pragmatic logic*. Reidel, Dordrecht, 1974.
3. K. Ajdukiewicz. *The scientific world-perspective and other essays*, 1931–1963, Dordrecht: Reidel, 1978.
4. J. Kaczmarek. Pojęcia a przedmioty ponadczasowe Whiteheada (Concepts and Whitehead's eternal objects). In J. Kaczmarek and R. Kleszcz, editors, *Wokół logiki i filozofii. Księga jubileuszowa z okazji 60. urodzin Profesora Grzegorza Malinowskiego* (*Around logic and philosophy. Jubilee book on the occasion of Professor Grzegorz Malinowski's 60th birthday*), pp. 149–162. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 2005.
5. J. Kaczmarek. Ontologia sądów i stanów rzeczy w strukturach PTS, CS i U (Ontology of propositions and states of affairs in the structures of PTS, CS and U). In A. Biłat, editor, *Aporie ontologii sytuacji, Ósmy tom serii „Stany rzeczy. Sytuacje. Zdarzenia"* (*The eighth volume of the series: States of affairs. Situations. Events*), pp. 201–232. Wydawnictwa Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 2009.
6. J. Kaczmarek. Two types of ontological structure: Concepts structures and lattices of elementary situations. *Logic and Logical philosophy*, 21(2): 165–174, 2012.
7. J. Kaczmarek. Atom ontologiczny: atom substancji (Ontological atom. Atom of substance). *Przegląd Filozoficzny*, 4(100): 109–124, 2016.
8. J. Kaczmarek. Ontology in Tractatus Logico-Philosophicus. A topological approach. In G.M. Mras, P. Weingartner and B. Ritter, editors, *Philosophy of logic and mathematics*, *Proceedings of the 41st International Ludwig Wittgenstein Symposium*, pp. 246–262. De Gruyter, 2019.
9. G.W. Leibniz. *The principles of philosophy known as monadology*, 1714/2015. Translated by Jonathan Bennett. Available at: `www.earlymoderntexts.com/assets/pdfs/leibniz1714b.pdf`.
10. *Longman dictionary of contemporary English*. PWN, Warsaw, 1989.
11. A.N. Whitehead. *Science and the modern world*. Cambridge University Press, 1929.

12. L. Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus*. BKF, PWN, Warszawa, 1997.
13. B. Wolniewicz. A formal ontology of situations, *Studia Logica*. 41(4):381–413, 1982.
14. B. Wolniewicz. *Logic and metaphysics. Studies in Wittgenstein's ontology of facts*. Polskie Towarzystwo Semiotyczne, Warszawa, 1999.

Suplement

Artykuł ten dedykuję Profesorowi Jerzemu Pogonowskiemu z okazji Jego jubileuszu. Temat, który w tym artykule poruszyłem, jest Profesorowi świetnie znany. Mam nadzieję, że choć jedna myśl będzie dla Profesora nowa.

Wielokrotnie spotykałem Profesora na różnych konferencjach (po raz pierwszy w Siedlcach na konferencji logicznej zorganizowanej przez matematyka prof. Lesława Szczerbę – był wówczas rok 1988 lub 1989). Wszystkie konferencje, na których spotykałem Profesora, były okazją do poszerzenia mojej wiedzy, zrozumienia funkcjonowania naszego środowiska logiczno-filozoficznego i namysłu nad tematami, które warto podejmować w nauce, po spotkaniach na Jego wykładach i w rozmowach towarzyskich.

Tu chcę jednak wspomnieć o jednej sprawie, ważnej dla środowiska logicznego w Polsce. Opowiem to tak, jak pamiętam dziś, a rzecz działa się parę lat temu. W roku 2017, podczas jednej z przerw kawowych, na konferencji logicznej w Szklarskiej Porębie, tj. konferencji *Applications of Logic in Philosophy and the Foundations of Mathematics*, rozmawiałem, na zewnątrz budynku konferencyjnego, z prof. Andrzejem Indrzejczakiem na temat przyznania doktoratu honoris causa profesorowi Janowi Woleńskiemu. Był to pomysł kolegów z Katedry Logiki i Metodologii Nauk Uniwersytetu Łódzkiego. W pewnym momencie dołączył do naszej rozmowy (wyszedł na papierosa) prof. Pogonowski. Zapytał: „I o czym Panowie rozprawiacie?" Odpowiedziałem: „Nie mamy tajemnic, rozmawiamy o doktoracie honoris causa dla Jana Woleńskiego". Na to Profesor: „O! Piękna idea. Profesorowi Woleńskiemu należy się taki zaszczyt". My (Indrzejczak i Kaczmarek): „Też jesteśmy tego zdania i dlatego chcemy go uhonorować". Prof. Pogonowski: „A nie myśleli panowie, by wystąpić z wnioskiem o nadanie doktoratu Wójcickiemu?" My: „??? To dobry pomysł, przemyślimy". Prof. Pogonowski: „Wójcicki jest starszy".

Prof. R. Wójcicki (po prawej) i jego promotor prof. G. Malinowski

I tak Profesor dał nam do myślenia, a ja z prof. Indrzejczakiem ustaliliśmy: najpierw wniosek o doktorat dla prof. Wójcickiego, potem dla prof.

Od lewej: prof. R. Murawski, prof. J. Woleński, prof. J. Pogonowski

Woleńskiego. Rezultatem tej rozmowy był następujący wynik: na wniosek Katedry Logiki i Metodologii Nauk UŁ:

– 1 października roku 2018 przyznano doktorat honoris causa Uniwersytetu Łódzkiego prof. Ryszardowi Wójcickiemu,
– 15 stycznia 2020 roku przyznano doktorat honoris causa Uniwersytetu Łódzkiego prof. Janowi Woleńskiemu (jednym z recenzentów był Profesor Pogonowski).

BREAKUP algorithm in the general setting

Adam Kolany

Drogiemu Jerzemu, z wyrazami szacunku i sympatii.
No bo o uwielbieniu w wypadku mężczyzn mówić nie przystoi...

Adam Kolany,
Lipsk (Saksonia), wrzesień 2021

Abstract In [2] R. Cowen and K. Wyatt proposed a preprocessing algorithm for satisfiability testing of CNF formulas. The complexity of the algorithm was $\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \#\mathcal{C})$, where $\#\mathcal{V}$ is the number of variables and $\#\mathcal{C}$ is the number of clauses to be satisfied. In this paper, we propose an algorithm based on *Search Depth First* method (see e.g. [1]) for preprocessing general satisfiability testing (see [3], [5]) whose complexity is $\mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times (\#\mathcal{C} + \mathtt{wd}(\mathcal{F}))) + \mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \#\mathcal{C} \times \mathtt{rk}(\mathcal{F}))$. It is worth noting that in the case of SAT, where the set $\mathcal{F}$ consists of pairs of the form $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}\}$, $\mathtt{p}$ – a propositional variable, we have $\#\mathcal{F} = \#\mathcal{V}$, $\mathtt{rk}(\mathcal{F}) = 1$ and $\mathtt{wd}(\mathcal{F}) = 2$ and the complexity transforms to $\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \#\mathcal{C})$, as in the Cowen's and Wyatt's case.

Adam Kolany
e-mail: adam.kolany@gmail.com

1 Generalized satisfiability

The following notions which are closely related to Schrijver's existence of *transversal* (see [6]) and having *property* $\mathbb{S}$ (see [3, 4]) can be found in [5].

Definition 1. Let $\mathcal{V} \neq \varnothing$.

1. A *hypergraph* is a pair $\mathcal{H} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{F} \rangle$, where $\mathcal{F} \subseteq \wp(\mathcal{V})$. The elements of $\mathcal{V}$ and $\mathcal{F}$ are called, respectively, *vertices* and *edges* of $\mathcal{H}$.
2. Let $\mathcal{H} \overset{\mathrm{DF}}{=\!=} \langle \mathcal{V}, \mathcal{F} \rangle$ be a hypergraph and let $\mathcal{C} \subseteq \wp(\mathcal{V})$ be a family of subsets of $\mathcal{V}$ (the elements of $\mathcal{C}$ will be called, for brevity, *clauses* in the sequel). We say that $\sigma \subseteq \mathcal{V}$ *satisfies* $\mathcal{C}$ with respect to $\mathcal{H}$ iff
   a. $\sigma \cap \alpha \neq \varnothing$, for all $\alpha \in \mathcal{C}$ and
   b. $f \nsubseteq \sigma$, for all $f \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{C}$ is *satisfiable* with respect to $\mathcal{H}$ iff there exists $\sigma \subseteq \mathcal{V}$ which satisfies $\mathcal{C}$ with respect to $\mathcal{H}$.

Many existential problems can be seen as generalized satisfiability problems (see [5]). For instance, existence of distinct representatives, graph vertex and edge colorability, (n, k)-colorability, $2 \leqslant k < n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, or list colorability.

2 Components

Definition 2. Let $\mathcal{H} \overset{\mathrm{DF}}{=\!=} \langle \mathcal{V}, \mathcal{F} \rangle$ be a hypergraph and let $\mathcal{C} \subseteq \wp(\mathcal{V})$.

1. We say that $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ are *directly connected* by $\mathcal{H}$ iff $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ or there is $f \in \mathcal{F}$ with $\alpha \cap f, \beta \cap f \neq \varnothing$
2. We say that $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ are *connected* by $\mathcal{H}$ iff they are directly connected, or there exist $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathcal{C}$ such that δ_1 is directly connected with α, δ_n is directly connected with β and δ_j is directly connected with δ_{j+1}, $j = 1, \ldots, n-1$.
3. A *component* of $\mathcal{C}$ with respect to $\mathcal{H}$ is a maximal nonempty subset of $\mathcal{C}$ whose every two elements are connected with respect to $\mathcal{H}$.

We have:

Theorem 1. *Let $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ be all different components of $\mathcal{C}$ wrt. $\mathcal{H}$. Then*

$$\mathcal{C} \text{ is satisfiable wrt. } \mathcal{H} \quad \text{iff} \quad \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \text{ are satisfiable wrt. } \mathcal{H}.$$

Proof. Of course, satisfiability of $\mathcal{C}$ implies the satisfiability of its all components. So let us assume that $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ are satisfiable and let σ_j satisfy $\mathcal{C}_j$, for $j = 1, \ldots, n$. We will show that $\sigma \overset{DF}{=\!=} \bigcup_{j=1}^{n}(\sigma_j \cap \bigcup \mathcal{C}_j)$ satisfies $\mathcal{C}$ wtr. $\mathcal{H}$. Of course, the only thing we must check is that $f \subseteq \sigma$ for no $f \in \mathcal{F}$. Assume otherwise and let $f \subseteq \sigma$ for some $f \in \mathcal{F}$. Since $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ are consistent, there are $i \neq j$, with $f \cap \sigma_i \cap \bigcup \mathcal{C}_i \neq \varnothing$ and $f \cap \sigma_j \cap \bigcup \mathcal{C}_j \neq \varnothing$. This however means that there are $v, w \in \mathcal{V}$ with $v \in f \cap \sigma_i \cap \bigcup \mathcal{C}_i$ and $w \in f \cap \sigma_j \cap \bigcup \mathcal{C}_j$. Since $v \in \bigcup \mathcal{C}_i$ and $w \in \bigcup \mathcal{C}_j$, there are $c \in \mathcal{C}_i$ and $d \in \mathcal{C}_j$ with $v \in c$ and $w \in d$. Then, however, $v \in c \cap f$ and $w \in d \cap f$ which means that c and d are directly connected, hence C_i and C_j are the same component, which, in turn, contradicts the assumption that $i \neq j$. □

Since testing satisfiability is NP-complete and thus all known algorithms for doing this are exponential, the above theorem shows that it is plausible to preprocess the satisfiability testing by splitting the set $\mathcal{C}$ into the components, if this can be done quickly. In the next paragraph we will outline a procedure the complexity of which is $\mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times (\#\mathcal{C} + \mathtt{wd}(\mathcal{F}))) + \mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \#\mathcal{C} \times \mathtt{rk}(\mathcal{F}))$, where $\#\mathcal{A}$ is the number of elements of $\mathcal{A}$, $\mathtt{rk}(\mathcal{A})$ is the maximal number of elements of $\mathcal{A}$ with nonempty intersection and $\mathtt{wd}(\mathcal{A})$ is the maximal length of an element of $\mathcal{A}$, where $\mathcal{A} \subseteq \wp(\mathcal{V})$.

Before we do this we will first show that components of $\mathcal{C}$ wrt. $\mathcal{H}$ are connected components in the usual sense of some graph.

Definition 3. Let $\langle \mathcal{V}, \mathsf{F} \rangle$ be a hypergraph and let $\mathcal{C} \subseteq \wp(\mathcal{V})$.

1. Let c_v be one of those elements of $\mathcal{C}$ to which v belongs, for $v \in \mathcal{V}$, and let c_f be one of those elements of $\mathcal{C}$ which has nonempty intersection with f, for $f \in \mathcal{F}$.
2. We define the graph $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}) = \langle \mathcal{C}, E_{\mathcal{V}} \cup E_{\mathcal{F}} \rangle$ where:

$$E_{\mathcal{V}} = \{\{c_v, \hat{c}\} : \hat{c} \in \mathcal{C}, v \in \hat{c}\}, v \in \mathcal{V}$$

$$E_{\mathcal{F}} = \{\{c_f, \hat{c}\} : \hat{c} \in \mathcal{C}, f \cap \hat{c} \neq \varnothing\}, f \in \mathcal{F}$$

Let us notice that the number of edges of $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ is $\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{C})) + \mathcal{O}(\#\mathcal{C} \times \#\mathcal{F})$.

We have:

Theorem 2. *A set $\mathcal{C}_0$ is a component of $\mathcal{C}$ wrt. $\mathcal{H}$ iff it is a component of the graph $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$.*

Proof. It is of course enough to show that $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ are connected wrt. $\mathcal{H}$ iff there is a path from α to β in $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$. We will prove this first showing that (1) if $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ are directly connected wrt. $\mathcal{H}$, then there is a path from α to β in $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$, and that (2) if $\{\alpha, \beta\}$ is an edge in $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ then α and β are connected.

(1) Let us assume that $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ are directly connected wrt. $\mathcal{F}$. Then either $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ or $\alpha \cap f, \beta \cap f \neq \varnothing$, for some $f \in \mathcal{F}$. In the first case, let $v \in \alpha \cap \beta$. Then $\{c_v, \alpha\}$ and $\{c_v, \beta\}$ are in E_v, hence (1) is true. If $\alpha \cap f, \beta \cap f \neq \varnothing$ then $\{c_f, \alpha\}$ and $\{c_f, \beta\}$ are in $E_{\mathcal{F}}$, hence again (1) is true.

(2) Edges from E_v are of the form $\{c_v, \tilde{c}\}$, $v \in \mathcal{V}$, $\tilde{c} \in \mathcal{C}_v$. They are directly connected, since their ends have a common vertex v. Edges from $E_{\mathcal{F}}$ are of the form $\{c_f, \tilde{c}\}$, $f \in \mathcal{F}$, $\tilde{c} \in \mathcal{C}_f$ and are directly connected, since their ends have nonempty intersection with f. □

3 Breakup

We assume that elements of both $\mathcal{C}$ and $\mathcal{F}$ are given as lists of vertices.

The procedure consists of four steps:

1. For each vertex $v \in \mathcal{V}$ create the list C_v consisting of all clauses containing v and put as c_v the first element of C_v.
2. For each vertex $v \in \mathcal{V}$ create the list F_v consisting of all edges containing v.
3. For each clause $c \in \mathcal{C}$ create the list F_c consisting of all edges intersecting c and put as c_f the first element of C_f.
4. For each clause c construct the list L_c of its neighbours in $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ (the neighbourhood representation of $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$, which is required in the 5^{th} step)
5. Perform DFS (*Deep First Search*) based procedure for finding connected components of $G(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$.

One easily sees that step 1 can be performed in time $\mathcal{O}(\#\mathcal{C} \times \mathtt{wd}(\mathcal{C}))$ and step 2 in time $\mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times \mathtt{wd}(\mathcal{F}))$. The 3^{rd} step can be done in time $\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{C}) \times \mathtt{rk}(\mathcal{F}))$. To estimate the complexity of 4^{th} step let us consider the following pseudocode realizing it:

```
for v in V do
          for c in C_v do {push L_cv, c; push L_c, cv;}
for f in F do
          for c in C_f do {push L_cf, c; push L_c, cf;}
```

As one can see, the first loop needs $\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{C}))$ steps and the other $\mathcal{O}(\#\mathcal{C} \times \#\mathcal{F})$ steps. They both produce a neighbourhood representance of $\mathsf{G}(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$.

The fifth step takes linear time of sum of the number of vertices and edges of $\mathsf{G}(\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ which is $\mathcal{O}(\#\mathcal{C}) + \mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{C})) + \mathcal{O}(\#\mathcal{C} \times \#\mathcal{F}) = \mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{C})) + \mathcal{O}(\#\mathcal{C} \times \#\mathcal{F})$. Thus the entire procedure requires time:

$$\overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{C} \times \mathtt{wd}(\mathcal{C}))}^{\text{step 1}} + \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times \mathtt{wd}(\mathcal{F}))}^{\text{step 2}} + \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{F}) \times \mathtt{rk}(\mathcal{C}))}^{\text{step 3}} +$$
$$+ \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{C})) + \mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times \#\mathcal{C})}^{\text{step 4}} + \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{C})) + \mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times \#\mathcal{C})}^{\text{step 5}} \leqslant$$
$$\leqslant \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \#\mathcal{C})}^{1,\,(\mathtt{wd}(\mathcal{C}) \leqslant \#\mathcal{V})} + \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{F}) \times \mathtt{rk}(\mathcal{C}))}^{3} + \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times \#\mathcal{C})}^{4} +$$
$$+ \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times \mathtt{wd}(\mathcal{F}))}^{2} \leqslant \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{F} \times (\#\mathcal{C} + \mathtt{wd}(\mathcal{F})))}^{2,4} + \overbrace{\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \mathtt{rk}(\mathcal{F}) \times \#\mathcal{C})}^{3,\,(\mathtt{rk}(\mathcal{C}) \leqslant \#\mathcal{C})}.$$

In the case of CNFs, where $\mathcal{F}$ consists of pairs of opposite literals $\#\mathcal{F} = \#\mathcal{V}$, $\mathtt{rk}(\mathcal{F}) = 1$ and $\mathtt{wd}(\mathcal{F}) = 2$, hence the entire complexity equals

$$\mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times (\#\mathcal{C} + 2)) + \mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times 1 \times \#\mathcal{C}) = \mathcal{O}(\#\mathcal{V} \times \#\mathcal{C})$$

as in Cowen's and Wyatt's case.

References

1. T.H. Cormen, C.E. Leiserson and R.L. Rivest. *Introduction to algorithms*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1990.
2. R. Cowen and K. Wyatt. BREAKUP: a preprocessing algorithm for satisfiability testing of CNF formulas. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 34(4):602–606, 1993.
3. R. Cowen. Property S. *Reports on Mathematical Logic*, 35:61–74, 2001.
4. R. Cowen, A. Kolany. Davis – Putnam Style Rules for Deciding Property S. *Fundamenta Informaticae*, 79:5–15, 2007.
5. A. Kolany. Satisfiability on hypergraphs. *Studia Logica*, 52:393–404, 1993.
6. A. Schrijver. The dependence of some logical axioms on disjoint transversals and linked systems, *Colloquium Mathematicum*, 39:191–199, 1978.

Few applications of ordinal recursion

Adam Kolany, Michał Kolany

Abstract In the following we show how some well known theorems of "elementary" mathematics can be (almost) trivially proven with ordinal recursion. In order to simplify the formulation of the latter a minor modification of the Morse-Kelley theory [4, 6, 3] of classes will be used here instead of the Zermelo&Fraenkel set theory [2]. More detailed formulation of what follows can be found in [5].

1 Language and axioms of the simplified Morse-Kelley Theory of Classes

The underlying theory of this paper is a first order theory with full language of the **ZF** set theory. That is, apart from $\in$, also such symbols as $\varnothing$, $\subseteq$, $\wp$, $\bigcap$, etc., along with their usual definitions:

$$\forall_x\,(x \notin \varnothing)$$

$$a \subseteq b \;\equiv\; \forall_x\,(x \in a \to x \in b)$$

$$\wp(a) = \{c : c \subseteq a\}\ , \qquad \bigcap a = \{c : \forall_{x \in a} c \in x\}\ , \qquad \text{etc.}$$

Adam Kolany
e-mail: adam.kolany@gmail.com
Michał Kolany
e-mail: michal.kolany@gmail.com

are present here.

As it concerns specific axioms of the theory, they are quite similar to those of **ZF** (see for instance [2]), except of Comprehension, which for a given formula Φ postulates the existence of *a class* consisting of exactly these *sets*[1] which satisfy this formula. The Axiom of Extensionality guarantees the uniqueness of such a class and this, similarly as in **ZF**, allows us, for a given formula $\Phi(x)$ and its free variable x, to consider the term

$$\{x : \Phi(x)\}$$

whose free variables are those of $\Phi(x)$ excluding x, and the defining axiom[2]

$$z \in \{x : \Phi(x)\} \longleftrightarrow \Phi[z/x] \wedge \mathsf{Set}(z)$$

assuming that x is free for z in Φ, where Set is the predicate letter for being a set:

$$\mathsf{Set}(z) \equiv \underset{x}{\exists}(z \in x).$$

2 Ordinals, superinductive classes and recursion

An *ordinal* is any set α which is

[transitive]
$x \in y \in \alpha \rightarrow x \in \alpha$
[connected]
$x, y \in \alpha \rightarrow x = y \vee x \in y \vee y \in x$
[well founded]
$\varnothing \neq A \subseteq \alpha \rightarrow \exists_{c \in A}(c \cap A = \varnothing)$.

Ordinals are: the emptyset, $\varnothing$, all natural numbers[3] and also the set of all natural numbers itself, ω. Given an ordinal α, its *successor*, $\mathsf{Succ}(\alpha) =$

[1] *Sets* are classes which belong to other classes. Classes which are not sets are *proper classes*.

[2] The inscription "$\Phi(x)$" means that x occurs in Φ. $\Phi[t/u]$ is the result of substituting t for u in Φ, where Φ is a formula, t is a term and u a variable which is free for t in Φ (see [7]).

[3] Natural numbers are the sets belonging to every inductive class, that is, to every class C satisfying:

$$\varnothing \in C, \quad \forall_{a \in C} \mathsf{Succ}(a) \in C.$$

$\alpha \cup \{\alpha\}$ is also an ordinal and given a **set** of ordinals A, its join, $\bigcup A$, and (with $A \neq \varnothing$) meet, $\bigcap A$, is an ordinal. An ordinal α is a *limit* ordinal, if $\alpha = \bigcup \alpha$. Otherwise it is a successor ordinal, $\alpha = \mathrm{Succ}\,(\bigcup \alpha)$ and thus $\bigcup \alpha$ is the *predecessor* of α.

The class **On** of all ordinals is transitive, connected and well founded, which proves it is not a set[4], since otherwise, the set $A = \{\mathbf{On}\}$ would contradict the well foundedness condition above (since then $\mathbf{On} \in \mathbf{On} \cap \{\mathbf{On}\}$).

Remark 1
Usually well foundedness is assumed as a separate axiom. This however is not necessary in "usual" mathematics, which fits in so called *von Neuman Universe*, where, in turn, this principle is just satisfied.

Remark 2
The relation[5]

$$\{\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{On} \times \mathbf{On} : \ \alpha \in \beta \ \}$$

well orders the class **On**.

A class $\mathcal{K}$ is *superinductive* iff

$$\bigwedge_{\alpha \in \mathbf{On}} (\alpha \subseteq \mathcal{K} \ \rightarrow \ \alpha \in \mathcal{K})$$

It is easy to show that all natural numbers belong to every superinductive class. It turns out that we have more:

Theorem 1 (Transfinite Induction). *If a class $\mathcal{K}$ is superinductive then* $\mathbf{On} \subseteq \mathcal{K}$.

Proof. Suppose $\mathbf{On} \nsubseteq \mathcal{K}$ and $\alpha \in \mathbf{On} \backslash \mathcal{K}$. Then, however, $\alpha \backslash \mathcal{K}$ is a nonempty subset of α, so there is $\beta \in \alpha \backslash \mathcal{K}$ with $\varnothing = \beta \cap (\alpha \backslash \mathcal{K}) = (\beta \cap \alpha) \backslash \mathcal{K} = \beta \backslash \mathcal{K}$. That is $\beta \subseteq \mathcal{K}$, hence, by superinductivity of $\mathcal{K}$, we get $\beta \in \mathcal{K}$ which is not the case. □

Using the above, one can prove the following:

The class of natural numbers exists by Comprehension and Separation Axioms. Its being a set is postulated as an axiom.

[4] Comp. Buralli-Forti Paradox [1].

[5] Relations are classes consisting of ordered pairs of sets.

Theorem 2 (Transfinite Recursion Theorem). *Let* $\mathsf{G} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ *be a function. Then there exists the unique function* $\mathsf{F} : \mathbf{On} \to \mathbf{Set}$ *satisfying*[6]

$$\mathsf{F}(\alpha) = \mathsf{G}(\mathsf{F} \restriction \alpha) \ , \quad \alpha \in \mathbf{On}.$$

This unique F *will be denoted as* $¤\langle \mathsf{G} \rangle$.

In order to prove the above, it is enough to show superinductivity of

$$\mathcal{K} = \left\{ \delta \in \mathbf{On} : \ \exists^{!}_{\mathsf{f}:\delta \to \mathbf{Set}} \forall_{\alpha \in \delta} \left(\mathsf{f}(\alpha) = \mathsf{G}(\mathsf{f} \restriction \alpha) \right) \right\}$$

which is not very difficult. □

3 Examples

3.1 Von Neumann Universe, regularity

Let

$$\mathsf{G}(\mathfrak{h}) = \begin{cases} \mathfrak{h}(\alpha) \cup \wp(\mathfrak{h}(\alpha)) & \text{if } \mathrm{Dm}(\mathfrak{h}) = \mathrm{Succ}(\alpha) \\ \bigcup \mathrm{Rg}(\mathfrak{h}) & \text{else} \end{cases}$$

and let $\mathfrak{V} = ¤\mathsf{G}$. Then, in particular,

$$\mathfrak{V}(\zeta) = \mathsf{G}(\mathfrak{V} \restriction \zeta) = \begin{cases} \mathfrak{V}(\alpha) \cup \wp(\mathfrak{V}(\alpha)) & \text{if } \zeta = \mathrm{Succ}(\alpha) \\ \bigcup (\mathfrak{V}\text{"}\zeta) & \zeta \text{ is a limit ordinal} \end{cases}$$

The class

$$\mathbb{V} = \bigcup \mathrm{Rg}(\mathfrak{V})$$

is called the *von Neumann Universe*. As it was mentioned above, all elements of $\mathbb{V}$ satisfy the well foundedness condition. Since all "standard" mathematics can be done in this universe, we will assume that well foundedness holds for every set:

[6] Given a class H and a set $\mathfrak{a}$, the *value*, $\mathsf{H}(\mathfrak{a})$, *of* $\mathfrak{a}$ *with respect to* H. is $\bigcup(\mathsf{H}\text{"}\{\mathfrak{a}\})$. If H is a function and $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle \in \mathsf{H}$, then $\mathsf{H}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$.

Axiom of Regularity

$$\forall_{a\neq\varnothing}\exists_{c\in a}\,(a\cap c=\varnothing)$$

Under this assumption, the von Neumann Universe is equal to the class of all sets.

3.2 Set enumeration, cardinality of sets

In this and all further examples, we will also assume validity of the **Axiom of Choice**:

Given a nonempty family of nonempty sets A*, there exists a function* $\mathcal{C}:A\to\bigcup A$ *satisfying*

$$\mathcal{C}(a)\in a\,,\quad a\in A.$$

Definition 1. Let $A\neq\varnothing$. Then an extended choice function over $\wp(A)$ is any function $\mu:\wp(A)\to \mathrm{Succ}(A)$ satisfying

$$\mu(\varnothing)=A\qquad\text{and}\qquad\mu(S)\in S\,,\qquad S\in\wp(A)\setminus\{\varnothing\}\,.$$

Now let A be a set and let μ be an extended choice function on $\wp(A)$. Let moreover

$$G(h)=\mu(A\backslash \mathrm{Rg}(h))\ ,\quad h\in\mathbf{Set}.$$

Then $\xi=\exists\langle G\rangle$ satisfies

$$\xi(\alpha)=G(\xi\restriction_\alpha)=\mu(A\backslash\mathrm{Rg}(\xi\restriction_\alpha))=\mu(A\backslash\xi``\alpha)\ ,\quad \alpha\in\mathbf{On}$$

and

1. $A\in\mathrm{Rg}(\xi)$
2. $\xi^\star=\xi\restriction_{\ell_\xi}$ is an injection from ℓ_ξ onto A, where $\ell_\xi=\min\xi^{-1}``\{A\}$.

The function $\xi^\star$ above is called an *enumeration* of A, the number ℓ_ξ is the *length* of the enumeration $\xi^\star$. The least length of an enumeration of A is its *cardinality* and is a cardinal number[7].

To prove (1), suppose it is not the case. Then, for all $\alpha\in\beta\in\mathbf{On}$,

[7] Cardinal numbers are the ordinals which are not function images of less ordinals.

$$\xi(\beta) = \mu(A \backslash \xi"\beta) \in A \backslash \xi"\beta$$

and since $\xi(\alpha) \in \xi"\beta$, we get $\xi(\alpha) \neq \xi(\beta)$. That, however, means that ξ is bijective and thus its reverse is a function whose domain is a **subset** of A (namely $\xi"\mathbf{On}$) and its range is **On** which is a proper class, which contradicts the Replacement Axiom[8].

Now the (2) is straightforward. Since $\xi(\ell_\xi) = \mu(A \backslash \xi"\ell_\xi) = A$, we get that $A \subseteq \xi"\ell_\xi \subseteq \mathrm{Succ}(A) = A \cup \{A\}$. By the minimality of ℓ_ξ, in the latter we obtain $A = \xi"\ell_\xi$ and for all $\alpha \in \beta \in \ell(\xi)$, again

$$\xi(\beta) = \mu(A \backslash \xi"\beta) \in A \backslash \xi"\beta$$

which implies $\xi(\alpha) \neq \xi(\beta)$. That is $\xi^\star = \xi \restriction_{\ell_\xi}$ is a bijection.

Let us notice that enumerations of A transport well orderings from their lengths into the set A:

$$a \preccurlyeq b \;\Leftrightarrow\; \xi^{-1}(a) \in \xi^{-1}(b)\ , \quad a, b \in A\ .$$

3.3 Basis of a vector space

Let V be a (notrivial) vector space over a field $\mathbb{K}$ and let μ be an extended choice over $\wp(V)$. Let moreover[9]

$$G(h) = \mu(V \backslash \mathrm{Lin}_V(V \cap \mathrm{Rg}(h)))\ , \quad h \in \mathbf{Set}$$

and let $\mathfrak{B} = \curlywedge\langle G \rangle$. Then $\mathfrak{B} : \mathbf{On} \to \mathrm{Succ}(V)$ and

$$\mathfrak{B}(\alpha) = G(\mathfrak{B} \restriction_\alpha) = \mu(V \backslash \mathrm{Lin}_V(V \cap (\mathfrak{B}"\alpha)))\ , \quad \alpha \in \mathbf{On}$$

and the set $B = \mathrm{Rg}(\mathfrak{B}) \setminus \{V\}$ is a basis of the space V.

First notice that, similarly as before, V is in the range of $\mathfrak{B}$ and thus for $\alpha = \min\left(\mathfrak{B}^{-1}\{V\}\right)$, we obtain

$$V = \mathrm{Lin}_V(\mathfrak{B}"\alpha)\,,$$

[8] Functional images of sets are sets.

[9] $\mathrm{Lin}_V(A)$ is the smallest vector subspace of V containing A. In particular, $\mathrm{Lin}_V(\varnothing) = \{\Theta\}$, where Θ is the nought vector of V.

hence $\mathfrak{B}"\alpha$ spans V. Suppose it is not linearly independent. Then

$$0 = \sum_{p=1}^{n} a_p \cdot \mathfrak{B}(\alpha_p)$$

for some $\alpha_1 \in \cdots \in \alpha_n \in \alpha$ and $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Without loss of generality, we may assume that $a_n \neq 0$ and then

$$\mathfrak{B}(\alpha_n) = -\frac{1}{a_n} \cdot \sum_{p<n} a_p \cdot \mathfrak{B}(\alpha_p) \in \underbrace{\mathrm{Lin}(\{\mathfrak{B}(\alpha_1), \ldots, \mathfrak{B}(\alpha_{n-1})\})}_{\subseteq \mathrm{Lin}(\mathfrak{B}"\alpha_n)}$$

On the other hand,

$$\mathfrak{B}(\alpha_n) = \mu(V \backslash \mathrm{Lin}(\mathfrak{B}"\alpha_n)) \in V \backslash \mathrm{Lin}(\mathfrak{B}"\alpha_n)$$

which contradicts the above.

3.4 Kuratowski-Zorn Lemma

Let $\langle A, \preccurlyeq \rangle$ be a partially ordered set whose all chains are bounded and let

$$G(h) = \mu(\mathrm{Bd}(A \cap \mathrm{Rg}(h)) \backslash \mathrm{Rg}(h)) \ , \quad h \in \mathbf{Set}$$

where

$$\mathrm{Bd}(S) = \{a \in A : \forall_{s \in S}(s \preccurlyeq a)\}$$

for $S \subseteq A$ and where μ is an extended choice function over $\wp(A)$. Then if $\mathcal{L} = \sqsupset\langle G \rangle$,

$$\mathcal{L}(\alpha) = \mu(\mathrm{Bd}(A \cap \mathcal{L}"\alpha) \backslash \mathcal{L}"\alpha) \ , \quad \alpha \in \mathbf{On}.$$

Again similarly as previously, we get $A \in \mathrm{Rg}(\mathcal{L})$. We will show that $\mathcal{L}"\alpha$, with $\alpha = \min\left(\mathcal{L}^{-1}"\{A\}\right)$, is a maximal chain in A.

Proof. Indeed. To show that $\mathcal{L}"\alpha$ is a chain, let $\delta \in \gamma \in \alpha$. Then

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mu(\mathrm{Bd}(A \cap \mathcal{L}"\gamma) \backslash \mathcal{L}"\gamma) \in \mathrm{Bd}(A \cap \mathcal{L}"\gamma) \backslash \mathcal{L}"\gamma$$

hence, in particular $\mathcal{L}(\gamma) \succcurlyeq \mathcal{L}(\delta)$, since $\mathcal{L}(\delta) \in \mathcal{L}"\gamma$.

To show that $\mathcal{L}"\alpha$ is a maximal chain, let us notice that

$$A = \mathcal{L}(\alpha) = \mu(\mathrm{Bd}(A \cap \mathcal{L}"\alpha) \setminus \mathcal{L}"\alpha) \notin \mathrm{Bd}(A \cap \mathcal{L}"\alpha) \setminus \mathcal{L}"\alpha$$

hence $\mathrm{Bd}(A \cap \mathcal{L}"\alpha) = \mathrm{Bd}(\mathcal{L}"\alpha) \subseteq \mathcal{L}"\alpha$ which means that $\mathcal{L}"\alpha$ has no proper extensions. □

3.5 Ultrafilter Extension Theorem

The *Ultrafilter Extension Theorem* says that every filter in a lattice can be extended to a maximal one. It is also well known that this can be obtained easily from an apparently weaker statement that in every nontrivial lattice there exists a maximal filter.[10]

We will show here how to get a filter with the transfinite recursion.

Proof. So let $\mathcal{K}$ be a filter with the least element[11] $\bot \in \mathcal{K}$ and let μ be an extended choice on $\wp(\mathcal{K})$. Let also

$$\mathfrak{F}[S] = \left\{a \in \mathcal{K} : \exists_{a_1,\dots,a_n \in S}\, (a \geqslant a_1 \wedge \dots \wedge a_n)\right\},$$

$$☺(S) = \{a \in \mathcal{K} :\ \mathfrak{F}[S \cup \{a\} \neq \mathcal{K}]\}$$

and let

$$G(h) = \mu(☺(\mathcal{K} \cap \mathrm{Rg}(h)) \setminus \mathrm{Rg}(h)) \ , \quad h \in \mathbf{Set}.$$

Then for $f = ⌑\langle G\rangle$

$$f(\alpha) = \mu(☺(\mathcal{K} \cap f"\alpha) \setminus f"\alpha) \ , \quad \alpha \in \mathbf{On}.$$

Again, we easily show that $\mathcal{K} \in \mathrm{Rg}(f)$. Then $\mathfrak{F}[f"\alpha]$ with $\alpha = \min\left(f^{-1}"\{\mathcal{K}\}\right)$ is an ultrafilter. First let us show it is a filter. Suppose otherwise. Then there exists

$$\alpha_1 \in \dots \in \alpha_n \in \alpha \text{ with } \bot = f(\alpha_1) \wedge \dots \wedge f(\alpha_n).$$

[10] Ultrafilters are just maximal filters.

[11] If a lattice $\mathcal{K}$ does not contain the least element, one can extend it to such that has one and consider this extension instead.

Because

$$\mathcal{K} \neq f(\alpha_n) = \mu(\circledcirc(\mathcal{K} \cap f"\alpha_n) \setminus f"\alpha_n) \in \circledcirc(\mathcal{K} \cap f"\alpha_n) = \circledcirc(f"\alpha_n)$$

we have

$$\bot \notin \mathfrak{F}[f"\alpha_n \cup \{f(\alpha_n)\}] \supseteq \mathfrak{F}[\{f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)\}] \ni \bot.$$

This contradiction shows, that $\mathfrak{F}[f"\alpha]$ is a filter indeed.

To show the maximality, let us notice that

$$\mathcal{K} = f(\alpha) = \mu(\circledcirc(\mathcal{K} \cap f"\alpha) \setminus f"\alpha) = \mu(\circledcirc(f"\alpha) \setminus f"\alpha) \notin \mathcal{K}\,.$$

Thus $\circledcirc(f"\alpha) \subseteq f"\alpha$ and hence any element c outside $f"\alpha$ is outside $\circledcirc(f"\alpha)$. This means that

$$\mathcal{K} = \mathfrak{F}[(f"\alpha) \cup \{c\}] = \mathfrak{F}[\mathfrak{F}[f"\alpha] \cup \{c\}]$$

and proves the maximality of $\mathfrak{F}[f"\alpha]$. □

3.6 Hahn-Banach theorem

Let V be a real valued vector space, let W be its subspace and let a linear mapping $f : W \to \mathbb{R}$ satisfy

$$f(w) \leqslant p(w)\ , \quad w \in W$$

where $p : V \to \mathbb{R}$ is subadditive[12]. Then there exists a linear mapping $f^\star : V \to \mathbb{R}$ extending f and satisfying

$$f^\star \leqslant p.$$

Proof. To prove that, let us consider the family $\mathcal{F}$ of all real valued linear mappings defined on subspaces of V which are bounded by p, let

$$\circledcirc(H) = \{F \in \mathcal{F} : H \subsetneq F\}\ , \quad H \subseteq V \times \mathbb{R}$$

[12] That is, p satisfies $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, $p(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot p(x)$, $x, y \in \mathcal{V}$, and $\alpha \geqslant 0$.

and let

$$\mathsf{G}(\mathfrak{h}) = \begin{cases} \mathfrak{f} & \mathfrak{h} = \varnothing \\ \mu\left(\circledcirc\left(\bigcup\left(\mathcal{F} \cap \mathrm{Rg}(\mathfrak{h})\right)\right)\right) & \text{else,} \end{cases} \qquad \mathfrak{h} \in \mathbf{Set}$$

where μ is an extended choice on $\wp(\mathcal{F})$, and let $\mathfrak{F} = \natural\langle \mathsf{G} \rangle$.

Usually in the proof of this theorem, the following Lemma is utilized:

Lemma 1. *With the assumptions as above, for any* $\mathfrak{u} \in \mathsf{V} \backslash W$*, there exists a linear function*

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{u}} : \mathrm{Lin}_{\mathsf{V}}(W \cup \{\mathfrak{u}\}) \to \mathbb{R}$$

extending $\mathfrak{f}$ *and satisfying*

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{u}}(w) \leqslant \mathfrak{p}(w) \ , \quad w \in \mathrm{Lin}_{\mathsf{V}}(W \cup \{\mathfrak{u}\}) .$$

With that lemma we obtain that:

$$\circledcirc(\mathsf{H}) = \varnothing \qquad \text{iff} \qquad \mathrm{Dm}(\mathsf{H}) = \mathsf{V}$$

for any $\mathsf{H} \in \mathcal{F}$.

Straightforwardly from the definition[13],

$$\mathfrak{F}(0) = \mathsf{G}(\mathfrak{F} \restriction_0) = \mathsf{G}(\varnothing) = \mathfrak{f}$$

and, for $\alpha > 0$,

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \mathsf{G}(\mathfrak{F} \restriction_\alpha) = \mu\left(\circledcirc\left(\bigcup\left(\mathcal{F} \cap \mathrm{Rg}(\mathfrak{F} \restriction_\alpha)\right)\right)\right) = \\ = \mu\left(\circledcirc\left(\bigcup\left(\mathcal{F} \cap (\mathfrak{F}"\alpha)\right)\right)\right)$$

Now, if $\gamma \in \mathbf{On}$, $\mathcal{F} \notin \mathfrak{F}"\gamma$ and $\beta \in \alpha \in \gamma$, we have

$$\mathcal{F} \neq \mathfrak{F}(\alpha) = \mathsf{G}(\mathfrak{F} \restriction_\alpha) = \mu\left(\circledcirc\left(\bigcup\left(\mathcal{F} \cap (\mathfrak{F}"\alpha)\right)\right)\right) = \\ = \mu\left(\circledcirc\left(\bigcup(\mathfrak{F}"\alpha)\right)\right) \in \circledcirc\left(\bigcup\left(\mathfrak{F}"\alpha\right)\right) \subseteq \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} \neq \mathfrak{F}(\beta) = \mathsf{G}(\mathfrak{F} \restriction_\beta) = \mu\left(\circledcirc\left(\bigcup\left(\mathcal{F} \cap (\mathfrak{F}"\beta)\right)\right)\right) = \\ = \mu\left(\circledcirc\left(\bigcup(\mathfrak{F}"\beta)\right)\right) \in \circledcirc\left(\bigcup\left(\mathfrak{F}"\beta\right)\right) \subseteq \mathcal{F}$$

[13] $0 \in \omega$ and $\varnothing$ is the same set.

and $\mathfrak{F}(\beta) \in \mathcal{F} \cap (\mathfrak{F}"\alpha)$, hence

$$\mathfrak{F}(\beta) \subseteq \bigcup (\mathcal{F} \cap (\mathfrak{F}"\alpha)) \subsetneq \mathfrak{F}(\alpha) \in \mathcal{F}.$$

This means that $\mathfrak{F} \restriction_\gamma$ is a bijection from γ to $\mathcal{F}$ and preserves ordering:

$$\beta \in \alpha \in \gamma \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{F}(\beta) \subsetneq \mathfrak{F}(\alpha)$$

which, in turn, implies that $\mathcal{F} \in \mathrm{Rg}(\mathfrak{F})$, since otherwise $\mathfrak{F}$ would be a bijection mapping **On** into $\mathcal{F}$ and this would contradict the Replacement Axiom.

So let now $\gamma = \min\left(\mathfrak{F}^{-1}"\mathcal{F}\right)$. Then, of course, $\mathcal{F} \notin \mathfrak{F}"\gamma$, and thus $\mathfrak{F}"\gamma$ is a chain. Hence, in particular,

$$f = \mathfrak{F}(0) \subseteq f^\star \overset{\text{df}}{=\!=} \bigcup (\mathfrak{F}"\gamma) \in \mathcal{F}.$$

Moreover,

$$\mathcal{F} = \mathfrak{F}(\gamma) = \mu\left(☺\left(\bigcup (\mathcal{F} \cap (\mathfrak{F}"\gamma))\right)\right) = \\ = \mu\left(☺\left(\bigcup (\mathfrak{F}"\gamma)\right)\right) = \mu(☺(f^\star))$$

which implies that $☺(f^\star) = \varnothing$ and this, by Lemma 1, implies that $\mathrm{Dm}(f^\star) = V$. □

References

1. C. Burali-Forti. Una questione sui numeri transfiniti. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11:154–164, 1897.
2. A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel and A. Lévy. *Foundations of Set Theory*. Elsevier, 1973.
3. W. Guzicki and P. Zbierski. *Podstawy teorii mnogości*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1978
4. J.L. Kelley. *General topology*. Springer, New York, 1975.
5. M. Kolany. *Master Thesis: Twierdzenia o Rekursji*. University of Silesia, 2021.
6. A. Morse. *A Theory of Sets*. Academic Press Inc., New York, 1965.
7. W.A. Pogorzelski. *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1981.

Mathematics *vs* reality. A note on applicability of mathematics

Roman Murawski

Mathematics, one of the most abstract disciplines, is used and applied with success in various contexts and in various domains – not only in natural sciences like physics, chemistry, astronomy or technology but also in social sciences like psychology, sociology, linguistics etc. Even more, it is claimed that thanks to application of mathematics such disciplines become more scientific. What are the reasons of such opinions? Why mathematics being – as an abstract science – far from the real world can be with success applied to describe the real world and various phenomena including human behavior and products of human activity?

In fact, mathematics was applied in the sphere of practical activity of human beings from its beginnings – ancient Egyptians and Babylonians used mathematics for example by measuring fields or building pyramids. In ancient Greece there appeared an idea that natural phenomena are not results of decisions or whims of gods but that they are consequences of certain laws and regularities – this was the beginning of the process of demythologization of the nature and of the rational investigation of the real world. However, such approach had initially rather a qualitative and not quantitative character. Only in modern times there appeared a scientific method connecting experiment with a reasoning, a mathematical modeling with experiment. This approach was based on the activity of scientists – in opposition to the attitude of ancient and Middle Ages scholars who were

Roman Murawski e-mail: roman.murawski@amu.edu.pl
Faculty of Mathematics and Computer Science, Adam Mickiewicz University, Poznań

concentrated on the contemplation of the nature. The aim of the new method was to express regularities of nature in the form of laws of nature using the precise language of mathematics and then to check them by experiments. This was based on the conviction that "The book of nature is written in the language of mathematics" and that "Mathematics is the alphabet in which God described the Universe" – as Galileo Galilei expressed it. Such approach made possible not only the description of the world but was also the key to its transformations.

The usage of mathematics and its language in various domains can lead to astonishing situations. For example, in statements of demography [cf. 20] – in which mathematical statistics is used – can appear the symbol of π. One can ask: what has π, i.e., the ratio of the circumference of a circle to its diameter, to do with the demography?

Many mathematical concepts have their immediate source in physical reality, mathematics has an empirical genesis and various mathematical theories have been established as a response to needs of natural sciences like physics. However, mathematics is in fact an abstract domain governed by its inner own rules. In modern mathematics one has to do with very abstract objects whose properties are characterized by axioms. And, in fact, the only condition put on axioms is their mutual consistency[1] and the requirement that they lead to interesting and beautiful mathematical results.[2] Observe that abstract axiomatic theories can have many various interpretations. Add that many mathematical theories use the concept of infinity, even more, in many of them this concept plays an important and indispensable role. However the concept of infinity is far from our direct experience – by using our senses we have to do exclusively with finite objects.

All those circumstances make the problem of applicability of mathematics more complex and difficult. It becomes still more complex and difficult if one would add here one component, namely the following questions: (1) why human thinking, in particular scientific method and classical logic, are adequate with respect to the nature and (2) are there in fact regularities, laws of nature, is the nature rational? Since we would like to concentrate

[1] One does not require nowadays from axioms that they should be true statements. In fact, in the case of abstract concepts and axioms characterizing such concepts the problem of their truth became senseless.

[2] Godfrey Harold Hardy said that "[Beauty] is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics" – quotation after Hammond [10, p. 22].

here on problems of the philosophy of mathematics, we do not want to consider those problems. They are connected with other disciplines like cosmology, ontology, cognitive sciences, etc. Our aim in the paper is to show how various theories formulated in the philosophy of mathematics attempted to explain the phenomenon of applicability of mathematics to the real world.

Before doing this one should make an important distinction, namely the distinction between two theses:

(A) the world is in fact mathematical,

(B) the world can be mathematized.

The first thesis is the claim that there is certain correspondence and adequacy between objects of the real world and objects of mathematics, that the world is ontologically mathematical, that mathematics is "the language of nature". On the other hand, the statement that the world can be mathematized means that concepts and methods of mathematics can be successfully and effectively used in order to describe the real world and its regularities. Observe that the first thesis implies the second one, i.e., if the world would be mathematical, then it could be mathematized but not necessarily *vice versa*. Among advocates of the first thesis one finds such scientists as Alfred North Whitehead, Werner Heisenberg, Carl Friedrich von Weizsäcker and Roger Penrose as well as Józef Życiński and Michał Heller. Add that the first thesis is in fact an ontological thesis stating the structural and functional adequacy of the nature and mathematics.

After those introductory remarks consider now how in the philosophy of mathematics the problem of the mathematical character of the world (thesis A) and the problem of its mathematizability (thesis B) were explained.

Let us begin by Plato (427–347 B.C.). His conception is based on the theory of ideas claiming that there are two separate spheres of beings: the unchanging, constant world of ideas that are clearly determined real entities existing beyond time, space and independently of human cognition. On the other hand, there are variable things of the material world being experienced by human beings with the help of their senses, possessing a lower level of reality, being unstable shadows of ideas. Ideas do exist really, physical objects have their source in them. They receive their existence from ideas. Physical objects are for example circular when they participate in the idea of circularity. There are many circular objects but only one idea of circularity. Things are like images of ideas, ideas are prototypes of things.

Mathematical objects belong to the world of ideas. Theorems of (pure) mathematics are suitable with respect to the material world of things because the latter are material images of immaterial ideas and concepts. A simple example: "One apple and one apple are two apples" – this is a true theorem of applied mathematics since in the immaterial world of numbers "$1 + 1 = 2$" holds – this is a theorem of pure mathematics. It is so because one apple participates in the ideas of unit and two apples participate in the idea of two. In this way the applicability of mathematics to the description of the nature is not any more a puzzle.

Plato's conception is the base of a trend in the philosophy of mathematics called mathematical platonism. However the latter is not homogeneous. A common part of such conceptions is the claim that there exists the world of mathematical objects which are independent of the material world and of the human mind. Consequently, they are also independent of time and space. The real world, the nature becomes in platonism a material model of mathematical theories or embodiment of mathematical structures. However this conception has some weaknesses. In particular, it does not fully explain relations between ideal mathematical objects and physical/material objects. It admits also the parallel existence of sense-experienced reality on the one side and of the ideal world of mathematics on the other whereby objects of the latter do not causally influence objects of the former. Consequently there is no immediate cognitive approach to the world of mathematical objects. They can be explored either indirectly by investigating the material world via senses or directly by intuition or direct insight. Plato himself explained this problem by the theory of anamnesis. A mathematician has in fact in his mind inborn knowledge about concepts and ideas and recalls them – they were seen by his soul in its life in the world of ideas. A human being attains in his earthly life the knowledge about ideas and mathematical concepts by recollection and not by constructing or active learning.

Platonism had and still has many followers. Among them were Euclid (about 365 – about 300 B.C.), Proclos Diadochus (410–485), Georg Cantor (1845–1918), Gottlob Frege (1848–1925), Kurt Gödel (1906–1978) and the co-founder of Polish School of Logic Jan Łukasiewicz (1878–1956).

According to Gödel, the thesis that mathematical objects exist independently of time, space and human mind is necessary in order to obtain a satisfactory system of mathematics similarly as the assumption of the

existence of physical objects is needed to explain sensual impressions. He wrote [9, p. 137]:

> Classes and concepts may, however, also be conceived as real objects, [...] existing independently of our definitions and constructions. It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence.

Note that Gödel did not explain what are in fact mathematical objects and how do they exist. He stressed only that they are different from their representations in mathematical theories – they are with respect to them transcendent. The basic source of mathematical knowledge is – according to Gödel – intuition. Data provided by intuition should be developed by a deeper investigation of objects. Consequently the mathematical knowledge is not only the result of passive contemplation of intuitive data but is also a result of activity of human mind. The latter has a dynamic and cumulative character.

Jan Łukasiewicz wrote that when he considers even the simplest logical problem then he has an impression that he is "facing a powerful, most coherent and most resistant structure" [15, p. 165]. And further:

> I sense that structure as if it were a concrete, tangible object, made of the hardest metal, a hundred times stronger than steel and concrete. I cannot change anything in it; I do not create anything of my own will, but by strenuous work I discover in it ever new details and arrive at unshakable and eternal truth. Where is and what is that ideal structure? A believer would say that it is in God and is His thought.[3]

Another answer to the question on ontological status of mathematical objects and their relation to the sensual reality was provided by Aristotle (384–322 B.C.), the pupil of Plato. He claimed that mathematics is not a science talking about independent ideal objects prior to the world of things but it is the knowledge of objects being forms of things, being idealizations obtained by the process of abstraction. Hence they do not exist timelessly and independently of things but are in a sense in things. Mathematical objects are – similarly as in platonism – real, they are thought reflections of forms of things, they do exist objectively, however, are not independent

[3] "Konstrukcja ta działa na mnie jak jakiś konkretny dotykalny przedmiot, zrobiony z najtwardszego materiału, stokroć mocniejszego od betonu i stali. Nic w niej zmienić nie mogę, nic sam dowolnie nie tworzę, lecz w wytężonej pracy odkrywam w niej tylko coraz to nowe szczegóły, zdobywając prawdy niewzruszone i wieczne. Gdzie jest i czym jest ta idealna konstrukcja? Filozof wierzący powiedziałby, że jest w Bogu i jest myślą Jego."

of the world of things. Mathematics is the knowledge of properties and mutual relations of those objects – and those objects apply (via forms of things) to empirical objects. In *Physics* Aristotle wrote (193 b 22):

> Obviously physical bodies contain surfaces and volumes, lines and points, and these are the subject-matter of mathematics. [...] Now the mathematician, though he too treats of these things, nevertheless does not treat of them as the limits of a physical body; nor does he consider the attributes indicated as the attributes of such bodies. That is why he separates them; for in thought they are separable from motion, and it makes no difference, nor does any falsity result, if they are separated.

And in *Metaphysics* we find the following words (1061 a 33):

> As the mathematician investigates abstractions (for before beginning his investigation he strips off all the sensible qualities, e.g. weight and lightness, hardness and its contrary, and also heat and cold and the other sensible contrarieties, and leaves only the quantitative and continuous, sometimes in one, sometimes in two, sometimes in three dimensions, and the attributes of these qua quantitative and continuous, and does not consider them in any other respect, and examines the relative positions of some and the attributes of these, and the commensurabilities and incommensurabilities of others, and the ratios of others; but yet we posit one and the same science of all these things – geometry – the same is true with regard to being.

The position represented by Aristotle is nowadays known in the philosophy as moderate realism. Conceptions in spirit of it are not homogeneous. One finds here the conception of Saint Thomas Aquinas and his followers or conceptions of followers of dialectical materialism as well as conceptions of various mathematicians.[4] Also the conception of Nicolas D. Goodman can be located here. The latter claimed [cf. 7] that objects of mathematics are mathematical forms of physical phenomena. A common feature of all such conceptions is the claim that objects of mathematics are abstractions from physical reality. It should be added, however, that in order to explain the whole complexity of modern mathematics a multi-stage abstractions should be allowed. The very process of abstraction can be understood in various ways. In particular, Aristotle and the followers of Thomas Aquinas talked about abstraction omitting variability, Jean Piaget about reflecting abstraction, i.e., abstracting from the activity of a knowing subject [cf. 19], dialectical materialism says about generalizing abstraction, abstraction of potential realization and abstraction of actual infinity [cf. 15].

[4] Among Polish mathematicians who stressed the connections between mathematics and the nature one finds for example Hugo Steinhaus and Andrzej Mostowski.

A positive feature of moderate realism is the fact that it does not become embroiled into troubles and ontological difficulties of platonism. Its drawback is in particular the fact that the existence of mathematical objects is dependent not only of objects of the material world but also of the existence of abstracting subjects – in fact, there must exist not only the material world but also somebody or something who/which performs the act of abstraction. Further, some mathematical concepts are in fact not abstractions from physical objects but rather idealizations of them. Even more, there are many objects in mathematics having no connection with objects of the material world but obtained by abstractions from abstractions.

Some similarity to Aristotle's conception can be seen by the empiricist. They claim that the only source of mathematical knowledge is experience. Among them one finds John Locke (1632–1704), David Hume (1711–1776) and John Stuart Mill (1806–1873). The latter maintained, for example, that the source of mathematics is the reality perceived by senses. Mathematical concepts have been simply abstracted from the reality by omitting some properties of real objects and by generalizing and idealizing other properties. In his work *System of Logic* he wrote [16 p. 280]:

> The points, lines, circles, and squares which any one has in his mind, are (I apprehend) simply copies of the points, lines, circles, and squares which he has known in his experience.

Note that by such approach the problem of applicability of mathematics remains an unsolvable puzzle.

Similarly as Aristotle, also Nicholas of Cusa (1401–1464), a mathematician and a theologian, looked for the origin and source of mathematical objects in things of the real world. He justified his conception by referring to theology. He claimed that God created the world according to principles and rules of mathematics and put the mathematical ideas like numbers or figures into things. Human beings attempt to conceive and understand the God's work, rules and regularities of it by simulating and reconstructing them in mathematics.

Similar idea one finds by Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) who said "*Dum Deus calculat et cogitationem exercit, fit mundus*".[5] This sentence forms the kern of Leibniz's rationalism playing – according to him – the essential role in mathematics. Hence mathematics is the divine source

[5] This is a sentence added in the margin of the short essay *Dialogus*, August 1677, p. 191.

of God's creation. Consequently, the phenomenon of applicability of mathematics to the description and explanation of the world is no problem any more, even more, it is in fact a necessary condition of such a description (in cosmological dimension). Mathematics becomes the discovery and reconstruction of the divine *ratio* in the creation.

This same approach one finds by Polish philosophers Michał Heller and Józef Życiński. Since mathematical objects and structures are something abstract and ideal, hence if one wants to explain the mathematical character of the world, one must assume the existence of God as a Great Mathematician who granted the mathematical structure to the reality. Heller claims even that "God is Mathematics". However it should be added that we never will get to know completely the world because our mathematics is too simple with respect to God's mathematics and mathematics "encoded" in the reality.

A different solution to the problem of applicability of mathematics has been proposed by Immanuel Kant (1724–1804). According to him theorems of pure mathematics belong to the intuitive class of synthetic (hence extending our knowledge) *a priori* (hence independent of sensual experience) judgements. They cannot be empirical, i.e., *a posteriori*, because they are universal and necessary. On the other hand they must be synthetic because they concern individual imaginations of the structure of space and time. They are *a priori* because pure space and time are *a priori* conditions of any perception of physical objects.

How synthetic *a priori* statements are possible at all? Kant answered this fundamental question in his *Kritik der reinen Vernunft* (1781 and 1787) and in *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können* (1783). According to him, synthetic *a priori* statements are possible because there are *a priori* components in our knowledge. In fact, space and time as forms of our intuition (*Anschauung*) and categories as forms of reason[6] are such *a priori* elements. They are necessary conditions of any cognition. Hence space and time are added by our senses to our impressions. Consequently, we cannot reach in our cognition the essence of things, things as such (*Ding an sich*) – we do not

[6] Kant distinguished twelve categories divided into four sets of three: (1) of quantity: unity, plurality, totality; (2) of quality: reality, negation, limitation; (3) of relation: substance-and-accident, cause-and-effect, reciprocity; (4) of modality: possibility, existence, necessity.

know how things really are because we capture them in forms of space and time.

Mathematics investigates just time and space as *a apriori* forms of our intuition. The *a priori* intuition of time is the basis for arithmetic and the intuition of space – for geometry. Hence mathematics deals with the sphere of pure intuition, it enables us to organize and to structure the stream of impressions from the world.

However, Kant did not claim that a passive contemplation suffices in order to obtain a complete and full description of the structure of space and time. Just the opposite. Human mind constructs mathematical concepts in this sense that going beyond verbal definitions of them it delivers appropriate objects *a priori*. It should be also stressed that Kant made the distinction between the construction of a mathematical object and the postulating of its existence. The letter requires merely internal consistency while the former requires that perceptual space should have a certain structure. Consequently, one can postulate the existence of, for example, 5-dimensional sphere but one cannot construct it. Hence Kant did not deny the possibility of consistent geometries other than Euclidean one. So the development of non-Euclidean geometries in the nineteenth century did not refute Kant's philosophy of mathematics.

As said above, theorems of pure mathematics belong – according to Kant – to synthetic *a priori* judgements. Hence they are necessary. On the other hand, propositions of applied mathematics are either synthetic *a posteriori* (if they concern the empirical contents of sense perceptions) or synthetic *a priori* (if they concern the structure of space and time). Pure mathematics considers the structure of space and time free from empirical material and applied mathematics has for its subject matter the structure of space and time together with the material filling them.

Why theorems of mathematics are appropriate to describe the sensual reality? Kant answered this question in *Prolegomena* where he wrote:

> If, however, this image – or, better, this formal intuition – is the essential property of our sensibility by means of which alone objects are given to us, and if this sensibility represents not things in themselves but only their appearances, then it is very easy to comprehend, and at the same time to prove incontrovertibly: that all outer objects of our sensible world must necessarily agree, in complete exactitude, with the propositions of geometry, because sensibility itself, through its form of outer intuition (space), with which the geometer deals, first makes those objects possible, as mere appearances. [...] since space as the geometer thinks it is precisely the form of sensory intuition which we find in ourselves

> *a priori* and which contains the ground of the possibility of all outer appearances (with respect to their form), these appearances must of necessity and with the greatest precision harmonize with the propositions of the geometer, which he extracts not from any fabricated concept, but from the subjective foundation of all outer appearances, namely sensibility itself.[7]

Kant even said that [12, p. 13]:

> In every cognition there is so much genuine science as there is mathematics in it.[8]

Still another answer to our general question has been given by Willard Van Orman Quine (1908–2000). According to him, mathematics should be considered not in separation from other disciplines but as an integral element of the complex of all domains explaining the reality.[9] Since we are realists in the case of physical theories in which mathematics plays a role of an important instrument, one should also be a realist with respect to mathematical objects of mathematical theories. Since mathematics is indispensable for example in physical theories, its objects like sets, numbers, functions do exist – in a similar way as there are electrons which are indispensable for physical theories. Quine accepted only one kind of existence. Hence one does not find by him a distinction between physical, mathematical, ideal, intentional, conceptual etc. existence but simply existence. He rejects also the possibility of dividing a scientific theory into an "analytical" (hence purely conventional) part and a "synthetic" one (dealing with the reality). Note that from the indispensability argument there follows the

---

[7] Wenn aber dieses Bild, oder vielmehr diese formale Anschauung, die wesentliche Eigenschaft unserer Sinnlichkeit ist, vermittelst deren uns allein Gegenstände gegeben werden, diese Sinnlichkeit aber nicht Dinge an sich selbst, sondern nur ihre Erscheinungen vorstellt, so ist ganz leicht zu begreifen, und zugleich unwidersprechlich bewiesen: daß alle äußere Gegenstände unsrer Sinnenwelt notwendig mit den Sätzen der Geometrie nach aller Pünktlichkeit übereinstimmen müssen, weil die Sinnlichkeit durch ihre Form äußerer Anschauung (den Raum), womit sich der Geometer beschäftigt, jene Gegenstände, als bloße Erscheinungen selbst allererst möglich macht. [...] da der Raum, wie ihn sich der Geometer denkt, ganz genau die Form der sinnlichen Anschauung ist, die wir a priori in uns finden, und die den Grund der Möglichkeit aller äußern Erscheinungen (ihrer Form nach) enthält, diese notwendig und auf das präziseste mit den Sätzen des Geometers, die er aus keinem erdichteten Begriff, sondern aus der subjektiven Grundlage aller äußern Erscheinungen, nämlich der Sinnlichkeit selbst zieht, zusammen stimmen müssen.

[8] "[...] in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist".

[9] For the conception of Quine see, for example, [3] and [4] as well as [19].

assumption that mathematics is – at least partially – able to describe and to understand the real world especially in such cases where it is an instrument in theories involving the real world. Mathematics as an instrument is simply a part of theories of the world constructed by scientists.

Add that a similar attitude was assumed also by Hilary Putnam (1926–2016). Therefore the indispensability argument is called today Quine–Putnam argument.

An interesting solution of the problem of applicability of mathematics is proposed by structuralism – nowadays a trendy tendency in the philosophy of mathematics. It is claimed there that objects of study in mathematics are structures and not individual objects. Hence one do not ask, for example, what are natural numbers because the answer would be meaningless. Important are, in fact, only connections and relations between entities called numbers. Mathematicians do not study numbers or other objects but only relations between them. They are interested in structural properties and not in properties of single objects taken out of context. Maybe this is the reason for the applicability of mathematical theorems in particular situations in the real world – despite the fact that mathematical theorems concern in fact abstract objects like structures.

Another new tendency in the philosophy of mathematics is the tendency stressing the need of considering the research practice of mathematicians. Among conceptions developed in the framework of this trend one finds, in particular, the conception of Raymond Louis Wilder (1896–1982) treating mathematics as a cultural system [cf. 21]. Wilder explains the phenomenon of the applicability of mathematics in the following way: Since mathematics, like physics, chemistry or other similar disciplines, are cultural systems and problems considered by mathematicians, physicists or chemists are suggested to them by cultural powers and tendencies active in appropriate subcultures and since additionally (intellectual) contacts between mathematicians, physicists or chemists are sufficiently strong, then it should be expected that mathematics will be appropriate from the point of view of its applicability in natural sciences. In this way a sociological-cultural explanation of the "effectiveness of mathematics" is given. One should observe, however, that such an explanation is not fully satisfying because it stops at the phenomenological and sociological level and does not provide deeper ontological and epistemological reasons.

So far no word has been said about conceptions like nominalism and conceptualism as well as classical conceptions, i.e., logicism, intuitionism and formalism. However they do not provide anything new and significant to our problem. According to nominalism, mathematical concepts are pure names and mathematics studying them is in fact something like game on symbols without any connection with the material reality. There are even attempts to show that mathematical apparatus is in fact superfluous, for example, in physics [cf. 6]. Physics can be developed without mathematics, mathematics does not bring in anything important to our understanding of the sensual world, anything that would be empirically important. Mathematical objects are in fact useful fictions. As justification of such theses one provides reconstructions of physical theories in which mathematical has been eliminated. However, it should be noticed that such reconstructions concern only single theories (by Field it is Newtonian gravitation theory). Even more, the considered theses collapses for example in the case of quantum mechanics. Recall here Einsten's words (quoted by Werner Heisenberg): "The theory decides what can be observed" [cf. 11, pp. 92, 111 and 112].

Conceptualism (claimed for example by intuitionists) says that concepts of mathematics are free creations of human mind and the latter has not to take into account the outer reality or – as intuitionists do – it refers to the primitive intuition of natural numbers and connections of this intuition with the outer world is unclear. Hence the problem of applicability of mathematics remains here completely unexplained.

Logicism and formalism did not consider the problem of applicability at all – they were concentrated on the providing solid foundations for mathematics as such by reducing it to something simple and certain, for example to logic (in logicism) or to finitistic mathematics founded on clear and immediate intuition in Kant's style (in formalism).

* * * * *

The above panorama of attempts to answer the question why mathematics is suitable in describing and explaining the phenomena of the world suggests the answer: WE DO NOT KNOW. Some scientists – for example Wigner – say here about "the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural science" [cf. 20]. Add that Wigner claims that mathematics is only a "formal game", there is no genuine content in it. A mathematician

posses in fact no knowledge, he/she has only particular skills of using aptly some concepts.

Considering effectiveness of applications of mathematics one should stress that it is in fact effective in case of such disciplines as physics, chemistry or astronomy. On the other hand, it becomes less effective in biology, social sciences or humanities. Why it is so? Maybe it is the problem of the complexity of structures considered in those disciplines? Or maybe appropriate mathematical theories have not been constructed yet?

Not knowing what is in fact the reason of effective applicability of mathematics let us finish by quoting some nice *adagia* attempting to indicate the mystery with which one has to do here. Hugo Steinhaus (1887–1972), a famous Polish mathematician who appreciated applied mathematics said: "Mathematics mediates between spirit and matter"[10] An American architect Claude Fayette Bragdon (1866–1946) wrote: "Mathematics is the handwriting on the human consciousness of the very Spirit of Life itself" [5, p. 61]. And Albert Einstein said [6]:

> The most beautiful and deepest experience a man can have is the sense of the mysterious. It is the underlying principle of religion as well as of all serious endeavour in art and science.[11]

References

1. Aristotle, *Metaphysics*. In *The works of Aristotle*, At the Clarendon Press, Oxford, 1908.
2. Aristotle, *Physics*. In *The works of Aristotle*, At the Clarendon Press, Oxford, 1908.
3. Th. Bedürftig and R. Murawski. *Philosophy of mathematics*. Walter de Gruyter Verlag, Berlin/Boston, 2018.
4. Th. Bedürftig and R. Murawski. *Philosophie der Mathematik* (fourth extended edition). Walter de Gruyter Verlag, Berlin/Boston, 2019.
5. C.F. Bragdon. *Architecture and democracy*. Alfred A. Knopf, New York, 1918.
6. A. Einstein. *Mein Glaubensbekenntnis*. 1932. `http://www.einsteinwebsite.de/z_biography/glaubensbekenntnis.html`
7. H. Field. *Science without numbers: The defence of nominalism*. Princeton University Press, Princeton. Second extended edition: Oxford University Press, Oxford, 2016.

[10] "Między duchem a materią pośredniczy matematyka". These words of Steinhaus were inscribed on his tombstone.

[11] "Das Schönste und Tiefste, das der Mensch erleben kann, ist das Gefühl des Geheimnisvollen. Es liegt der Religion sowie allem tieferen Streben in Kunst und Wissenschaft zugrunde."

8. N. Goodman. Mathematics as natural science. *Journal of Symbolic Logic*, 55:182–193, 1990.
9. K. Gödel. Russell's mathematical logic. In P.A. Schilpp, editor, *The philosophy of Bertrand Russell*, pp. 125–153, The Tudor Publ. Comp., New York. Also in: P. Benacerraf, H. Putnam, editors, *Philosophy of mathematics: Selected readings*, Englewood Cliffs, pp. 211–232, New Jersey, 1964; second edition: Cambridge University Press, Cambridge 1983, pp. 447–469. See also: K. Gödel, *Collected works*, volume II, pp. 119–141, S. Feferman et al., editors, Oxford University Press, New York and Oxford, 1990.
10. A.L. Hammond. Mathematics – our invisible culture. In L.A. Steen, editor, *Mathematics today. Twelve informal essays*, pp. 15–34, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1978.
11. W. Heisenberg. *Der Teil und das Ganze – Gespräche im Umkreis der Atomphysik*. München, 1969.
12. I. Kant. *Critik der reinen Vernunft*. Johann Friedrich Hartknoch, Riga; second edition: *Kritik der reinen Vernunft*. Johann Friedrich Hartknoch, Riga 1787. English translation: *Critique of Pure Reason*, translated by P. Guyer and Allen W. Wood, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
13. I. Kant. *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*. Johann Friedrich Hartknoch, Riga. English translation: *Prolegomena to any future metaphysics that will be able to come forward as science with selections from the critique of pure reason*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004 (revised edition).
14. I. Kant. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. Johann Friedrich Hartknoch, Riga, 1786.
15. A. Lemańska. Przedmiot matematyki w materializmie dialektycznym. In M. Lubański and Sz. Ślaga, editors, *Z zagadnień filozofii przyrodoznawstwa i filozofii przyrody*, volume 7, pp. 23–53, Akademia Teologii Katolickiej, Warszawa 1985.
16. J. Łukasiewicz. W obronie logistyki. In *Myśl katolicka wobec logiki współczesnej. Studia Gnesnensia*, 15(12–26):159–165. Reprinted in: J. Łukasiewicz, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961, pp. 210–219. English translation: In defence of logistic. In J. Łukasiewicz, *Selected Works*, edited by L. Borkowski, North- Holland Publ. Comp., Amsterdam-London and PWN (Polish Scientific Publishers), Warszawa 1970, pp. 236–249.
17. J.S. Mill. *A system of logic, ratiocinative and inductive, being a connected view of the principles of evidence and the methods of scientific investigation*. John W. Parker, London, 1843.
18. R. Murawski. *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań, 2017.
19. J. Piaget. *Psychology and epistemology: Towards a theory of knowledge*. Penguin, Harmondsworth, 1972.
20. E.P. Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13:1–14, 1960.
21. R.L. Wilder. *Mathematics as a cultural system*. Pergamon Press, Oxford, 1981.

Kilka uwag wokół intuicji językowej. Z okazji 70. rocznicy urodzin Profesora Jerzego Pogonowskiego

Władysław Zabrocki

Streszczenie Artykuł stanowi przyczynek do interpretacji epistemologiczno-metodologicznej wybranych propozycji badawczych Jerzego Pogonowskiego. Podjęto w nim próbę powiązania wczesnych Jego badań z badaniami z okresu dojrzałej twórczości. Wprowadzono pojęcie intuicji językowej oraz posłużono się procedurami eksplanacji i eksplikacji celem uzyskania pomostu poznawczego między wspomnianymi okresami twórczej aktywności Jubilata.

Profesora Jerzego Pogonowskiego znam od czasów moich studiów indywidualnych z zakresu filozofii języka, czyli więcej niż 40 lat. Uczęszczałem wówczas na zajęcia prowadzone przez pracowników byłego Instytutu Językoznawstwa UAM. Tam właśnie pracował od niedawna młody matematyk Jerzy Pogonowski. Miałem przyjemność podziwiać i z uwagą chłonąć jego pierwsze publiczne wystąpienia na forum bardzo aktywnej wówczas Komisji Językoznawczej PTPN. Podsłuchiwałem komentarze płynące ze strony zasłużonych językoznawców poznańskich (głównie polonistów), w myśl których ustalenia młodego Pogonowskiego nie korespondowały z powszechną praktyką badań językoznawczych. „Bardzo interesujący wykład, ale prelegent najwyraźniej nie rozumie językoznawstwa" – to uwaga, którą usłyszałem po burzliwej dyskusji wokół prób

Władysław Zabrocki e-mail: wladyslaw.zabrocki@amu.edu.pl
Katedra Metodologii Lingwistyki, Wydział Neofilologii, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

uporządkowania dyskursu językoznawczego, które prezentował Jerzy Pogonowski. Na zarzut, że to jest matematyka, a nie językoznawstwo, młody Jerzy Pogonowski odpowiadał z wyższością, że prawdziwa matematyka to też nie jest.

Chciałbym klasyfikować pierwsze próby działalności naukowej, już wtedy wyróżniającego się uczonego, jako badania prowadzące do eksplikacji zasadniczych pojęć semantyki językoznawczej (sam Jerzy Pogonowski powoływał się często na znane i chętnie czytane do dzisiaj prace wielkiego angielskiego językoznawcy i semantyka Johna Lyonsa), które później uczyniły Jerzego Pogonowskiego jednym z głównych przedstawicieli szkoły poznańskiej językoznawstwa aksjomatycznego (por. [2]).

Pozwoliłem sobie powyżej na kilka uwag natury bardziej osobistej. Przejdę teraz do kwestii merytorycznych, nie rezygnując zupełnie z refleksji subiektywnej, gdyż przedmiotem rozważań w niniejszej pracy chciałbym uczynić, obok laudacji na cześć drogiego Jerzego, zagadnienia szczególnie mnie interesujące, a związane z dziejami lingwistyki. Dokładniej rzecz ujmując, rozważę wybrany subiektywnie najbliższy mi nurt w tych dziejach, stanowiący z pewnością niewielki fragment oceanu niesłychanie zróżnicowanych i wręcz niemożliwych do ogarnięcia, trwających ponad dwa tysiące lat refleksji nad językiem naturalnym (por. [5]).

Profesor Jerzy Pogonowski od szeregu lat w swoim bogatym życiu naukowym znajduje miejsce na rozważania nad zagadnieniami wchodzącymi w skład kontekstu odkrycia w matematyce. Szereg publikacji poświęcił intuicji matematycznej. Chciałbym przyjrzeć się możliwości ustalenia korespondencji między wybitnymi w skali światowej osiągnięciami Profesora Pogonowskiego z zakresu aksjomatycznej lingwistyki, a podejmowanymi w okresie dojrzałej twórczości zagadnieniami dotyczącymi fundamentów odkryć matematycznych, które też, zdaniem wielu bardziej ode mnie kompetentnych badaczy w zakresie podstaw myślenia matematycznego, zajmują wyjątkowe miejsce w skali światowej.

Znana dychotomia odróżniająca właściwy nurt pracy naukowej, czyli kontekst uzasadnienia, od przynależnych, jak sądzono, heurystyce czy psychologii poznania działań w zakresie odkrycia naukowego wydaje się w obecnej refleksji epistemologiczno-metodologicznej nad nauką nie prowadzić już do umocnienia tak ważnej, zwłaszcza w nurcie pozytywistycznym, dychotomii między właściwą nauką a towarzyszącym jej czynnikom składającym się na szeroko rozumiane odkrycie naukowe. W ramach tego

ostatniego rozważano rolę założeń filozoficznych, czynników psychologicznych lub socjologicznych mających razem wpływ na indywidualne predyspozycje i możliwości twórcze naukowców. Z punktu widzenia kontekstu uzasadnienia ważne było ustalenie pozycji działań badaczy (już nie naukowców) lub rezultatów badań w kontekście zastanej sytuacji w danej dyscyplinie nauki. Panowało przekonanie, zgodnie z którym w nauce można będzie w przyszłości ograniczyć się do mechanicznego stosowania określonych procedur (np. dowodzenia w naukach formalnych lub sprawdzania hipotez w naukach empirycznych), które będą mogły być podejmowane przez sztuczną inteligencję i właściwie przeprowadzone zagwarantują stały postęp w zakresie wiedzy naukowej. Perspektywa filozoficzna, intuicyjne poznanie, wreszcie wyjątkowe predyspozycje psychologiczne lub szczególne okoliczności socjologiczne towarzyszące odkryciom naukowym wydawały się nieistotne z punktu widzenia celu badań naukowych, jakim uczyniono efektywność technologiczną dyrektywalnych konsekwencji twierdzeń ustalanych przez naukę (już nie naukowców, tylko badaczy mechanicznie stosujących odpowiednie procedury). Problem kapryśnych geniuszy wydawał się rozwiązany. Już nie genialne odkrycia decydowały o postępie nauki, lecz mrówcza praca tysięcy badaczy.

W tym kontekście chciałbym zauważyć, że badania profesora Pogonowskiego w dojrzałym okresie jego twórczości są naturalną konsekwencją prób eksplikacji pojęć lingwistycznych, a przede wszystkim roli i znaczenia poznania intuicyjnego, które tak znakomicie opisał Jerzy Pogonowski w ostatniej części niedawno wydanej pracy o aksjomatach ekstremalnych.

A oto cytat z mniej technicznej i znacznie wcześniejszej pracy:

> Gdzie widoczna jest intuicja matematyczna w działaniu? Po pierwsze, w aksjomatach teorii matematycznych – są one wszak przyjmowane na wiarę, bez uzasadnienia dowodem. Trzeba pamiętać, że droga do aksjomatycznego ujęcia danej dyscypliny matematycznej może być długa, bywa ono poprzedzone kumulacją wiedzy o obiektach tej dyscypliny. Po drugie, intuicja przejawia się w praktyce badawczej matematyków: stawianie hipotez, przeprowadzanie konstrukcji, uogólnianie, odwoływanie się do analogii – wszystkie te czynności motywowane są nie tylko już uzyskaną wiedzą, lecz także żywionymi przekonaniami intuicyjnymi. Dowodzenie jest potwierdzaniem intuicji. Po trzecie, wykorzystujemy odwołania do intuicji w dydaktyce matematyki, gdy np. za pomocą rysunków, obrazowych skojarzeń, wskazówek indukcyjnych lub powołań się na analogie wspomagamy rozumienie dowodów oraz konstrukcji [14, s. 107].

Intuicja w językoznawstwie to przede wszystkim przedmiot działań eksplanacyjnych lub eksplikacyjnych. I to jest kontekst uzasadnienia. Można

intuicje językowe wyjaśniać, na przykład przy pomocy stosownych hipotez natywistycznych, bądź można je precyzować i kodyfikować przy pomocy środków formalnych lub na przykład wybranego języka naturalistycznego, jakim jest niewątpliwie język współczesnej biologii.

Osobny problem stanowią intuicje językoznawcze obecne na przykład w tzw. tradycyjnym językoznawstwie. Były one przedmiotem formalnej eksplikacji w lingwistyce Chomsky'ego. Stąd częsta diagnoza, powszechna zwłaszcza wśród starszych lingwistów w II połowie XX wieku o tym, że Chomsky żadnych nowych faktów nie podaje. Niewątpliwie wyniki wspomnianej działalności eksplikacyjnej Chomsky'ego to nadal kontekst uzasadnienia.

Intuicje leżące u podstaw proponowanych hipotez językoznawczych to jednak także kontekst odkrycia. I tutaj można znaleźć miejsce dla sytuacji, którą często opisywał Jerzy Bańczerowski, wspomniana już wielka postać w poznańskiej szkole lingwistyki aksjomatycznej. Opowiadał on o tym, że na pytanie, skąd czerpie inspirację do formułowanych w swoich licznych pracach aksjomatów, wyrażał pogląd, że to jest kwestia natchnienia i jakby pomysły przychodziły do niego z zewnątrz, a on je tylko notował. Odpowiada to świetnie koncepcji intuicji twórczej opisanej w pracy Kahnemana [11] i rozwijanej przez badaczy podstaw świadomości prawniczej [6]. Nie bez przyczyny prof. Bańczerowski inicjował na UAM badania legilingwistyczne.

Warto zaznaczyć, że tak jak prof. Pogonowski jest wybitnym uczniem prof. Bańczerowskiego i współtwórcą poznańskiej szkoły językoznawstwa aksjomatycznego, tak dla obu niekwestionowanym mistrzem pozostaje prof. Tadeusz Batóg, od którego prac wszystko w zakresie tej poznańskiej szkoły się zaczęło (przede wszystkim por. [3]).

Moim zdaniem, nurt aksjomatyzacyjny w językoznawstwie to rodzaj autostrady prowadzącej do realizacji celów eksplikacyjnych. Obok autostrady do tego samego celu może prowadzić wiele dróg o mniejszej skali wyrafinowania poznawczego lub zgoła innej natury (na przykład odmiany poznawcze korytarzy powietrznych lub traktów wodnych). Oddalając się od gruntu metaforycznego, chciałbym wskazać na jeden konkretny przykład. Lingwistykę można eksplikować nie tylko na gruncie formalnym, ale także przy użyciu języka biologii czy fizyki jako języka zewnętrznego. Przykład może stanowić współczesna biolingwistyka lub szeroki nurt w fonetyce

strukturalnej rozwijany w połowie XX wieku, a wykorzystujący fizykę akustyczną.

Od czasu rewolucji generatywistycznej, którą zapoczątkowała, moim zdaniem, opublikowana w 1959 roku recenzja Chomsky'ego [7] z pracy B. Skinnera [17], zasadniczą procedurą rozwijaną w językoznawstwie stała się procedura wyjaśniania (eksplanacji). Czas na powrót do eksplikacji miał nadejść właśnie w ramach rozbudowujących się obecnie wspomnianych wyżej badań biolingwistycznych. Nie zaliczam do tych badań znanej pracy Lenneberga [13], która była poświęcona biologicznym uwarunkowaniom języka naturalnego nie zastępując dociekań stricte językoznawczych. Chodzi o nurt redukujący badania lingwistyczne do tych, które dają się wyrazić w języku współczesnej biologii i stanowią wstęp do przyszłej przyrodoznawczej, wyjaśniającej nauki o języku, bądź pozostając w nurcie badań humanistycznych przyczyniają się do lepszego spełniania funkcji perswazyjnej lingwistyki humanistycznej. To ostanie wiąże się z metaforycznym użyciem języka biologii.

Nawiasem mówiąc, metafory biologiczne są przedmiotem krytycznej refleksji prowadzonej w ramach postmodernistycznych nurtów lingwistyki humanistycznej, gdzie traktuje się je jako przeszkody na drodze do rewolucyjnego użycia języka, traktowanego jako narzędzie uzyskane po odpowiedniej modyfikacji zastanej rzeczywistości językowej, a używanego w celu walki z różnymi rodzajami zniewolenia (por. np. językoznawstwo feministyczne lub krytyczna analiza dyskursu). Z kolei w ekolingwistyce też chodzi o cele rewolucyjne, ale osiągane przy pomocy innego typu metafor biologicznych niż w ramach biolingwistyki, która koresponduje z wynikami ostatniej, minimalistycznej odmiany językoznawstwa generatywistycznego.

Chciałbym teraz zadać pytanie: czy można uprawiać humanistykę zgodnie z naturalistycznie rozumianymi procedurami naukowymi i nie redukować jej do nauk przyrodniczych (biologii, fizyki) lub formalnych (matematyki, logiki)?

Zacznę od prostego (obiegowego – por. [12]), wyliczenia rodzajów nauki wyodrębnionych według kryterium ontologicznego. Im bardziej abstrakcyjny przedmiot badań, tym bardziej proste i łatwiej dające się przedstawić w aparacie pojęciowym teorii systemów struktury: logika, matematyka, fizyka, biologia, językoznawstwo i literaturoznawstwo. W epistemologicznej interpretacji Jerzego Kmity zwraca się uwagę na stopień dedukcyjnego

uporządkowania twierdzeń danej nauki – największy w logice, najmniejszy w literaturoznawstwie. Chodzi o systematyzację przeprowadzoną w oparciu o stosowną, przechodnią relację nieodróżnialności ze względu na odpowiedni częściowy porządek.

Potraktujmy psychologię i socjologię jako nauki parasolowe. W XIX wieku łatwo było wyodrębnić przedmiot badań tych dziedzin wiedzy. W terminologii Hegla to byłby zapewne duch subiektywny i duch obiektywny lub dusze indywidualne i dusza zbiorowa. Dzisiaj trudno mówić o takich rozstrzygnięciach ze względu na rolę psychologii i socjologii w kognitywnym paradygmacie. Nie będzie to przedmiotem dalszej refleksji (por. uwagi rozbudowujące ten wątek w [18]).

Wyróżnijmy nauki empiryczne i formalne, dalej nauki przyrodnicze i humanistyczne. W obydwu przypadkach można potraktować wyróżnione człony zaproponowanych podziałów jako klasy abstrakcji od przechodniej relacji nieodróżnialności ze względu na częściowy porządek określony na zbiorze stanowiącym całościowo ujęty przedmiot badań wspomnianych nauk. To będzie podział według kryterium ontologicznego.

Językoznawstwo w tym podziale jest nauką humanistyczną mocno zaangażowaną w procedury służące dedukcyjnemu porządkowaniu twierdzeń (np. procedurę aksjomatyzacji – por. [2]).

Redukcja językoznawstwa do biologii, do fizyki, do matematyki i wreszcie do logiki jest programem może i atrakcyjnym poznawczo, ale praktycznie niewykonalnym. Nie będę rozwijał argumentacji, którą łatwo prowadzić w wielu kierunkach zależnych od przyjęcia stosownych założeń ontologicznych.

Język to zespół przekonań normatywnych i dyrektywnych oraz ograniczeń na nie nałożonych, zgodnie z którymi zachodzą stosunkowo niewielkie możliwości w zakresie zmienności historycznej (wbrew pozornie nieograniczonej różnorodności języków etnicznych), ze względu na konieczność akwizycyjności czy respektowalności tych przekonań. Jest to niezbędne, aby zapewnić realizację sensów (celów najbardziej preferowanych) tych czynności. Do warunków respektowalności oraz akwizycyjności mamy dostęp intuicyjny. Stąd obecność językowych intuicji społecznych (normatywnych) i intuicji uniwersalnych (natywistycznie motywowanych). Intuicje kształtowane są przez bodźce zewnętrzne i wewnętrzny mechanizm selekcji i mogą być przedmiotem eksplanacji bądź eksplikacji (por. [19]).

Warto na koniec wspomnieć o zaproponowanym przez Jerzego Pogonowskiego kontekście przekazu [15]. I tutaj eksplikacja terminów i twierdzeń językoznawczych jest tak samo użyteczna jak eksplikacja wyrażanych w intuicyjny sposób twierdzeń matematycznych.

Literatura

1. S. Auroux, E.F.K. Koerner, H.J. Niederehe i K. Versteegh, redakcja, *History of the language sciences. An international handbook on the evolution of the study of language from the beginnings to the present*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2006.
2. J. Bańczerowski. The axiomatic method in 20th century European linguistics. W S. Auroux, E.F.K. Koerner, H.-J. Niederehe i K. Versteegh, redakcja, *History of the language sciences. An international handbook on the evolution of the study of language from the beginnings to the present*, strony 2007–2025, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2006.
3. T. Batóg. *The axiomatic method in phonology*. Routledge & Kegan Paul, London 1967.
4. I. Bobrowski. *Zagadnienia metodologii i filozofii językoznawstwa*. Wydawnictwo Instytutu Języka Polskiego PAN, Kraków, 2020.
5. A. Bogusławski i E. Drzazgowska. *Język w refleksji teoretycznej. Przekroje historyczne*, tom 1–2. Warszawa: Katedra Lingwistyki Formalnej UW, Warszawa, 2016.
6. B. Brożek. *Umysł prawniczy*. Copernicus Center Press, Kraków, 2019.
7. N. Chomsky. Review of Skinner's *Verbal Behavior*. *Language*, 35:26–58, 1959.
8. N. Chomsky. Three Factors in Language Design. *Linguistic Inquiry*, 36:1–22, 2005.
9. M.D. Hauser, N. Chomsky i W.T. Fitch. The faculty of language: what is it, who is it, and how did it evolve? *Science*, 298:1569–1579, 2002.
10. E. Itkonen. *Grammatical theory and metascience: A critical investigation into the methodological and philosophical foundations of "autonomous" linguistics*. John Benjamins, Amsterdam, 1978.
11. D. Kahneman. *Thinking, fast and slow*. Penguin, London, 2012.
12. J. Kmita. *Wykłady z logiki i metodologii nauk*. PWN, Warszawa, 1973.
13. E.H. Lenneberg. *Biological foundations of language*. Wiley, New York, 1967.
14. J. Pogonowski. Kilka uwag o intuicji matematycznej. *Filozofia Nauki*, XX(2):107–113, 2012.
15. J. Pogonowski. Kontekst przekazu w matematyce. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 8:119–137, 2016.
16. J. Pogonowski. *Extremal axioms: logical, mathematical and cognitive aspects*. Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM, Poznań, 2019.
17. B.F. Skinner. *Verbal behavior*. Appleton-Century-Crofts, New York, 1957.
18. W. Zabrocki. *Psychologizm i socjologizm w dziejach transformacyjno-generatywnej refleksji nad językiem naturalnym*. Ernst Klett Sprachen, Stuttgart-Poznań, 2006.

19. W. Zabrocki. Między eksplanacją a eksplikacją – przyczynek do metodologii lingwistyki. Uwagi na marginesie Historii humanistyki Rensa Boda. *Scripta Neophilologica Posnaniensia*, 15:179–185, 2015.

Świsłocz

Commemorationes Professori Georgio Pogonowski Septuagenario Oblatae

Alfred F. Majewicz

За далью даль. . . , а там своя, иная даль
(Александр Трифонович Тарковский)
Ad multos annos, Georgi amice

Zaszczytne zaproszenie do udziału w uczczeniu pięknego jubileuszu pana profesora Jerzego Pogonowskiego stosownym i należnym mu *Festschriftem* zdobiła tak cenna w świecie akademickim deklaracja maksymalnej otwartości: „tematyka dowolna – tekst może być naukowy, ale też okolicznościowy". Nie zawsze oczywista oczywistość możności pogodzenia tych cech była (zamierzonym?) działaniem skutecznie zwyciężającym właściwą[1] emerytowanemu akademikowi pokusę okraszonego lawiną wiarygodnych powodów wymigania się od responsu pozytywnego na tak sformułowany pozew. Ceniący Wartości Jubilat dał tu piszącemu na tę okoliczność nie jedynie dobry przykład nie tylko uczenia się, ale i uczenia

Alfred F. Majewicz e-mail: majewicz@amu.edu.pl
International Institute of Ethnolinguistic and Oriental Studies, PL-62-060 Stęszew

[1] Zagranicznych koleżanek, kolegów, współpracowników i inne kontakty po ich przejściu na (z reguły na pewno) zasłużone emerytury mieni się nacechowanymi szczególnym szacunkiem specjalnymi prawnie sankcjonowanymi tytułami jak np. ⟨honorary professor⟩, ⟨почётныйи профессор lub (od 1804 roku!) заслуженный профессор⟩, 名誉教授 jap. *mejō kyōju*, chiń. *míngyù jiàoshòu*, itp., będącymi odpowiednikami łacińskiego *Professor Emeritus* **nie** będącego odpowiednikiem faktycznie dyskryminującego i z szacunku odzierającego rodzimego tworu ⟨emerytowany profesor⟩ (*emeryt* to w slangu derogatyw na pograniczu obelgi, np. w transporcie drogowym).

(*vide* Pogonowski 2016), a Jego zaplanowane i wyjawione przezeń z tego powodu marzenie sprawienia adresatowi „nieco uciechy" (*ibid.*, p. 295) ziściło się z naddatkiem.

Autor niniejszych okolicznościowych wynurzeń znalazł się w 19-osobowej grupie założycielskiej Instytutu Językoznawstwa UAM, powołanego oficjalnie do życia z dniem 1 października 1973 roku[2], jako jedyny asystent (bez etapu asystenta stażysty). Jerzy Pogonowski dołączył do kadry już większej w roku 1975 i zaskakująco szybko dowiódł, że ten matematyczny logik był w stanie zaskakująco szybko opanować arkany lingwistyki (w drugą stronę to nie za bardzo szło).

W warunkach „demokracji ludowej" instytucja nadzwyczaj skutecznie realizowała swoje zdecydowanie na ów czas „nierealistyczne" plany rozwojowe, stając się rozbudowaną strukturą organizacyjną z kadrą 44 osób zatrudnioną w pięciu Zakładach badawczych już w roku 1983 (stan z 1 lutego, Pogonowski jest wtedy już docentem, piszący to – adiunktem, cf. *Dziesięć lat Instytutu* . . . 1983:4–7), z czasem także chętnie odwiedzanym „miejscem spotkań lingwistów z dużymi nazwiskami ze Wschodu i Zachodu". Od 1981 Instytut zaczyna niskonakładowo publikować (w trzech seriach „Working Papers", „Occasional Papers", „Practical Aids" i pozaseryjnie informatory dokumentujące działalność instytucji i jej wyniki) wydawnictwa własne – docent Pogonowski, który był jednym z dwóch inicjatorów tej działalności, w ich ramach ogłosił kilka prac, kilka innych było wynikami uzyskanymi przez jego asystentów. Do końca działalności Instytutu wydano blisko setki tytułów, do niektórych wrócimy niżej.

Z początkiem czerwca 1987, po licznych zmianach, Instytut dysponował kadrą 60 pracowników i siedmioma Zakładami oraz zatrudniającą cztery wykwalifikowane osoby rosnącą ustawicznie Biblioteką Instytutu (ta była od początku). Zmiany owe to przede wszystkim usamodzielnienie się (wyjście poza Instytut) dwóch Zakładów, bolesna strata dwóch profesorów, utworzenie nowych Zakładów i – poczynając od roku akademickiego 1986/1987 – nabór własnych studentów na kolejno uruchamiane kierunki studiów: informacja naukowa, japonistyka, wkrótce potem sino-

[2] Jeśli pamięć nie zawodzi, formalny dokument w tej sprawie nosił datę z początku roku następnego z „działaniem wstecznym"; Instytut i w nim autor tekstu funkcjonowali od daty wskazanej.

logia, lituanistyka i arabistyka[3], umożliwiony poprzez utworzenie Zakładu Bałtologii, a przede wszystkim (1 grudnia 1987) kadrowo dominującego (22 pracowników, w tym 11 zagranicznych) Zakładu Języków Azji i Afryki (ZJAA). Wszystko to dramatycznie umocniło pozycję Instytutu nie tylko w kraju, ale i poza jego granicami i umożliwiło uczestnictwo w istotnych międzynarodowych projektach badawczych, jak i wymianę akademicką na coraz szerszą skalę. Docent Pogonowski został wicedyrektorem całości i kierownikiem Zakładu Językoznawstwa Stosowanego i Informacji Naukowej, piszący ten tekst – kierownikiem ZJAA. W 1990 roku Instytut wydał m.in. ponadstustronnicowy ilustrowany informator na swój jubileusz 15-lecia (Majewicz 1990) oraz drugi z kolei już fascykuł biuletynu informacyjnego ZJAA. Ta ostatnia (*nomen omen*) informacja jest istotna z uwagi na złowrogi człon tytułu trzeciego *i ostatniego* fascykułu tego biuletynu (Wicherkiewicz 1994).

Tu mównicę oddajmy *Kronice* UAM (1996:241): „po wyborach przeprowadzonych na plenarnym zebraniu *wszystkich* pracowników Instytutu Językoznawstwa wyłoniono dyrekcję tego Instytutu w składzie: doc. dr hab. Alfred F. Majewicz – dyrektor, doc. dr hab. Michał Hasiuk i doc. dr hab. *Jerzy Pogonowski* – wicedyrektorzy. Po *takim wyborze* w Instytucie doszło do poważnego konfliktu personalnego, którego nie udało się zażegnać mimo mediacji Jego Magnificencji Rektora J. Fedorowskiego oraz jego pełnomocników. Po *wielu* dyskusjach i *próbach znalezienia kompromisu Rada* Instytutu Językoznawstwa postanowiła dokonać podziału tego Instytutu na dwie katedry: Katedrę Językoznawstwa Ogólnego i Stosowanego oraz Katedrę Językoznawstwa Porównawczego i Orientalnego" (Zgółka 1996:241, kursywa afm.). Dla porządku: kandydat w tym *takim wyborze* był jeden – i to *nie ten*, który został w *takim wyborze* „wyłoniony". Temu *potem* „wyłonionemu" ***wperswadowano***, przy ogromnym jego oporze, zgodę na kandydowanie gwoli przydania pierwszym – i ostatnim – *jedynym* historycznym w pełni demokratycznym wyborom na stanowiska akademickie choćby cienia blasku. Kandydata, który „nie miał z kim przegrać", pokonało jego własne „przedwyborcze przemówienie", a samo „wyłonienie" tego, co się wyłoniło, dokonało się przewagą liczebnie aż nadto wyraźną. Kandydaturę „wyłonionego" w takim wyborze przedłożył „zebraniu wszystkich wyborców" docent Pogonowski, który w płomien-

[3] Przez całe pięć lat prowadzony był też „usługowo" przyjęty jednorazowo rocznik studentów bibliotekoznawstwa, piszący ten tekst prowadził seminaria z bibliografii.

nej mowie przedstawił przede wszystkim widziane jego oczami zalety *obu kandydatów*. „Wyłoniony" już „w sytuacji poważnego konfliktu" podał się do dymisji bezdyskusyjnie i natychmiast, ale poszukujący kompromisu mediatorzy *nie o takie Polskie* walczyli. W rezultacie „wyłoniony" poczytywać może sobie swobodnie i z dużą satysfakcją tak niespodzianą, a dumą napawającą, ozdobę swojej biografii, jaką jest i już na zawsze pozostanie prawdziwe i uczciwe *bycie wyłonionym* w historycznych jedynych bezpośrednich i powszechnych wyborach na stanowiska uniwersyteckie. Piszący ten tekst jest jednocześnie – i od zawsze był – kategorycznie przeciwny tak mechanicznym „wyborom", jak i „demokracji" w środowiskach twórczych, przede wszystkim więc w Nauce czy Sztuce. Na stanowisku dyrektora skazanej już instytucji zmuszony był przetrwać cały jeszcze rok – i był to dla wielu rok dobry i twórczo płodny, przede wszystkim jednak bardzo pouczający i hartujący.

Audietur et altera pars: w przedsłowiu do wyżej wspomnianego trzeciego *i ostatniego* fascykułu biuletynu ZJAA czytamy: „For reasons that went far beyond the academic work and principles, the Institute of Linguistics [. . .] a part of which was the Department ceased to exist in 1991 [. . .]. The Department became part of the newly founded Chair of Comparative Linguistic and Oriental Studies and [. . .] continued its activities in spite of very unfavorable conditions for it created by authorities of the Faculty (the Dean functioned simultaneously as the Chairperson of the other Chair – and we were to feel it every day – very painfully)" (Wicherkiewicz 1994:1).

ZJAA i późniejsze kilka jego wcieleń doprowadziły do stworzenia i ustabilizowania pierwszego na terenach polskich na zachód od Wisły liczącego się akademickiego ośrodka orientalistycznego aktualnie pod szyldem Instytut Orientalistyki UAM, *natomiast* próżno na Wydziale Neofilologii tego Uniwersytetu szukać dziś Instytutu Językoznawstwa. Jerzego Pogonowskiego zresztą też. Nie ma złego. . . , ale i. . . trochę szkoda. *Sapienti sat*. Przechodząc „na swoje", sam ZJAA niejako w wianie zasilił nową Katedrę[4], już z ⟨orientalistyką⟩ w nazwie, 51 swoich pracowników, w tym 18 pracowników zagranicznych (cf. Wicherkiewicz 1994:4–6). Była to

[4] W której przetrwał do jej reorganizacji w roku 1994. O meandrach rozwojowych poznańskiej orientalistyki tego okresu zob. Jankowski 2007:140–6. ZJAA i potem Instytut Orientalistyczny wydawały własne czasopismo LOSP (w dwóch seriach wydano 17 tomów); w przedmowach do poszczególnych tomów i artykułach w nich przewija się motyw losów instytucji je firmujących.

jednak kadra młoda, niedostatecznie utytułowana, profesorowie gościnni w liczbie trzech „się nie liczyli", dlatego aż (może raczej *tylko*) półtorej dekady przyszło czekać – bardzo aktywnie, przede wszystkim przez wyniki badawcze przekładające się na akademickie awanse – na podniesienie Katedry do rangi Instytutu Orientalistycznego 1 maja 2005. Historia owej drugiej Katedry miała przebieg zgoła odmienny[5].

Z Dostojnym Jubilatem, dla piszącego tekst – z Jerzym, łączą się lata przyjacielskiej znajomości, chyba setki przegadanych godzin, jedna wyprawa na „badania terenowe" do „naszych" Tatarów w Kruszynianach i nad graniczną Świsłocz przy okazji L (też tedy okrągłojubieluszowego) Zjazdu Polskiego Towarzystwa Językoznawczego w Białymstoku w 1992 roku[6], a nawet wspólna próba jednoczesnego „poratowania zdrowia" (z momentami iście groteskowymi) czy współautorstwo przynajmniej dwóch ogłoszonych drukiem prac. Osobną kategorię więzi trzeba tu stworzyć jednak dla doświadczeń zaiste traumatycznych, burzących porządek świata.

13 grudnia 1981 w samym środku mroźnej sobotnio-niedzielnej nocy samozwańczy, kaduczym prawem nadrzędny wobec konstytucyjnych władz państwa (jakimkolwiek by ono było), niekonstytucyjny organ nie wiadomo czego „wprowadził" cichcem (powyrywali kabelki z gniazdek w studiach radiowych) „w celu zapewnienia spokoju, ładu i porządku publicznego

[5] Ze względów oczywistych osiągnięcie jej stanu kadrowego pozwalające na taką samą aprecjację rangi nastąpiło błyskawicznie, acz nie bez tarć: zdołano powstrzymać „in mid 1994 a disgusting attempt to steal from us the rights to the succession of former name [i.e. ⟨Instytut Językoznawstwa⟩] in spite of the fact that our contribution to its scholarly and educational output was cosiderable and doubtlessly constituted an important part of our intellectual property" (afm w Wicherkiewicz 1994:1); nowy instytut w latach 1994–2000 nosił nazwę ⟨Instytut Lingwistyki⟩; powtórnie nazwany Instytutem Językoznawstwa przestał istnieć z dniem 20 lipca 2018. Instytut Orientalistyczny w swojej debiutanckiej edycji też nie umknął przed „zniesieniem" z końcem marca 2008, ale po epoce ⟨Katedry Orientalistyki⟩ jak ten „feniks z popiołów" (czy gniezdnych mar) wyłonił się w nowej „strukturze organizacyjnej Wydziału Neofilologii" jako Instytut Orientalistyki 1 stycznia 2020 wraz z Instytutem Etnolingwistyki oraz dwiema samodzielnymi Katedrami – Metodyki Lingwistyki i Skandynawistyki.

[6] To ważne o tyle, że piszący lata spędził na badaniach terenowych od Afryki i Farerów poprzez Syberię, Mongolię, Syjam, Koreę, Ryukyu, Japonię, Chiny, po Sachalin i Tajwan – i mógłby nie zachować w pamięci takiej maleńskiej wypraweczki, nie pierwszej ani jedynej, nad Świsłocz (w dniu pisania – do zrealizowania niemożliwej z powodu kolejnego w kraju stanu nadzwyczajnego), faktycznie „urwania się na wagary" – a jednak nie!

oraz umocnienia dyscypliny społecznej" *stan wojenny* na całym terytorium „umiłowanego kraju", o czym po świcie już objawiły w imieniu z kolei „wron"[7] drewnianym głosem smutny telewizor w ciemnych okularach i rozkleiwane po czym się dało „Obwieszczenia" plakatowego formatu.

Stan ów, poza wprowadzeniem siebie, wyprowadził na ulice czołgi[8], pozamykał, co tylko się dało i wszczął polowanie nie tylko na tych co sobie chcieli wziąć „Obwieszczenie" na historyczną pamiątkę, ale podle spisów. Na tych spisach byli także „uniwersyteccy", którzy trafiali, albo mogli trafić, do „internatów". W *Kronice* UAM *za lata akademickie 1981–1984* wydanej dopiero w roku 1997 (!) czytamy, że „rygory" tego stanu „zasadniczo ograniczyły wszystkie rodzaje aktywności akademickiej. Zajęcia dydaktyczne zostały zawieszone. [. . .] Zamknięte zostały wszystkie domy studenckie [. . .]. Znacznemu ograniczeniu uległa działalność naukowa Uczelni. [. . .] wprowadzono obowiązek kontroli dokumentów tożsamości wszystkich [. . .] wchodzących na teren Uniwersytetu oraz zalecono ograniczenie pracy w gmachach UAM do niezbędnego minimum [. . .]. Bez specjalnego pozwolenia władz nie można było organizować żadnych posiedzeń [. . .]. wielu pracowników dydaktycznych i studentów UAM przebywało w obozach internowania i nic nie wskazywało na ich rychłe uwolnienie. [. . .] Rektor wzywany był parokrotnie [. . .]" *ad Corvum in tapete* (s. 36, cytowane fragmenty pochodzą od tegoż rektora).

Pierwszą naszą obopólną z Jerzym reakcją była domowa wizyta *solacii atque consilii causa* u mądrego profesora z charyzmą, ogromną wiedzą i naprawdę ciężkimi doświadczeniami losowymi. Mieliśmy też szczęście, już jako cała społeczność Instytutu Językoznawstwa, być przeprowadzonymi przez najtrudniejszy okres tej „wojny"[9] rozważnym, zdystansowanym, pan-życzliwym i bezpiecznym rządzeniem naszego dyrektora profesora Michała Hasiuka.

Gdy tylko nadszedł okres oswajania w wymiarze indywidualnym uznanego po latach oficjalnie za przestępczy stanu wojny, profesor Pogonowski

---

[7] Nazwa gatunkowa *Corvus corone corone* (*sic*!). Świsłocz graniczna, dyscyplina społeczna, stan nadzwyczajny, wojenny, wrona *corona* i wirus *corona – déjà vu*. Pisali to z dużych liter.

[8] Światową karierę zrobiło i unieśmiertelniło się pewne zdjęcie z Warszawy ukazujące *Czas Apokalipsy* z kinem „Moskwa" w tle.

[9] Która w ujęciu Dziekana Neofilologii „praktycznie sparaliżowała życie Wydziału we wszystkich zakresach" (tenże tom, s. 156). *Kroniki* UAM za lata 1981–1987 wydane w latach 1997–1999 rozczarowują – i to jest eufemizm.

i autor tego wspomnienia wystąpili do Dyrektora Instytutu z prośbą o zawnioskowanie do władz o wyżej wspomniane „specjalne pozwolenie" na zwołanie i odbycie formalnie zabronionego zebrania naukowego Instytutu, koniecznego i niecierpiącego zwłoki, naszym zdaniem, z uwagi na szczególnie wielką dla Nauki doniosłość poczynionego odkrycia.

Czas tu na niedużą osobistą retrospekcję. Autor tego tekstu studiował w instytucji umożliwiającej dostęp do wyników badawczych uzyskiwanych przez uznawanych za czołowych w świecie uczonych, przede wszystkim amerykańskich, w zakresie językoznawstwa, a nawet do osobistego bezpośredniego uczestnictwa w gościnnych wykładach niektórych z nich w macierzystej uczelni, poznając rudymenty dyscypliny w epoce dominacji nurtu gramatyki transformacyjno-generatywnej, Noama Chomsky'ego i jego *Aspects of the Theory of Syntax* (1965), Emona Bacha i jego *Introduction to Transformational grammars* (1964), Rodericka A. Jacobsa i Petera S. Rosenbauma i ich *English Transformational Grammar* (1968), Owena Thomasa *Transformational Grammar and the Teacher of English* (1965, to był podstawowy wtedy i tam podręcznik), Andreasa Koutsudasa *Writing Transformational Grammars* (1966), Zelliga Sabbetaia Harrisa, D. Terence'a Langendoena, George'a Lakoffa, głębokich i powierzchownych struktur i pogoni za odkrywaniem językowych uniwersaliów[10]. Epokę charakteryzowała też mantra *take example from any language, take from English!* pomimo proliferacji tworzonych w tym duchu gramatyk transformacyjnych języków tak odmiennych jak turecki (Meskill 1970), tajski (Warotamasikkhadit 1972), chiński (Rand 1969), czy japoński (Inoue 1969). Teza była uporczywie jakby za tym, że struktura głęboka jest jedna i taka sama dla „wielu" lub nawet „wszystkich" języków, a różnorodność miała być tylko na powierzchni, jedna i ta sama struktura głęboka miała się realizować różnorodnie.

Świadomość ogromu zróżnicowania struktur poszczególnych języków istniała od przynajmniej zaproponowania przez Humboldta (1836) ich typologii (klasyfikacji ze względu na stopień zwartości grup – lub członów – syntaktycznych) i rosła w miarę postępu w poznawaniu i ich, i świata. Jednakże znikoma była świadomość, że niezadokumentowanymi

[10] Bardziej szczegółowych opisów bibliograficznych przywołań z tego fragmentu nie uznano tutaj za niezbędne.

wystarczająco[11] do wnioskowania na temat i struktur tak powierzchniowych jak i głębokich czy „uniwersaliów" w tym zakresie w dalszym ciągu pozostawało... 95% języków świata (spośród około 7000∼7500 etnolektów mogących mieć status odrębnych samodzielnych języków). Teza o wspólnej strukturze głębokiej dla różnych języków mogłaby dotyczyć więc najwyżej tych 5% języków dostatecznie opisanych, a to próba za mała do spekulowania o uniwersaliach.

Owe uniwersalia i struktury głębokie, ale szczególnie te powierzchniowe, były frapujące i zainspirowały u piszącego tu nigdy niepublikowane[12] elukubracje w niedokończonym studenckim eseju zaetykietowanym „The *degree of universality* of linguistic universals (towards a universal grammar?)", a dyplomowa praca (1973, [2]1990) wieńcząca sześć lat studiowania porównywała „struktury fraz werbalnych w angielskim, wybranych indoeuropejskich i nieindoeuropejskich" (japońskim, chińskim, swahili i około 35 innych) językach. Niebotycznie u autora poszybowała fascynacja tak osobiście doświadczoną wielością i rozmaitością struktur językowych odzwierciedlających jednocześnie wielość i rozmaitość sposobów myślenia, zachowań, etykiet, kultur, chyłkiem zaznaczyła swoją obecność myśl heretycka: a może różnorodność poznanych struktur powierzchniowych jest emanacją możliwie jeszcze większej różnorodności struktur głębokich...

Materiału do poznawania i wyodrębniania nowych zjawisk i zależności, podobieństw i różnic, kwestionowania ustalonych i ustalania nowych „prawidłowości"[13] itp., zaczął dostarczać przede wszystkim niezwykle intensywny rozwój badań terenowych wynikający z uświadomienia, że ponad połowie języków świata grozi w kilku następnych dekadach praktycznie nieuchronne wymarcie, a niemal wszystkie języki zagrożone i silnie zagrożone to jednocześnie języki bez dokumentacji, znowu w przewadze jakiej-

[11] To oznacza istnienie dużych słowników z języka i na język oraz jednojęzycznych, obszernej (*reference* ∼ *comprehensive*) gramatyki, tekstów oraz podręczników (szkolnych i do nauki jako obcego) dla każdego etnolektu uważanego za język udokumentowany – liczba tak udokumentowanych języków z pewnością nie przekraczała 350∼375.

[12] Jako całość i w oryginalnej formie; fragmenty były wykorzystane w późniejszych pismach, szczególnie w Majewicz 1989:177–239 i w recenzjach licznych dokumentacji języków przed ich sporządzeniem nieudokumentowanych.

[13] Np. „wykluczony" O-S-V i „rzadki" O-V-S szyki zdania okazały się być *typowymi* w językach amazońskich. Zob. Derbyshire & Pullum, szczególnie 1986:1–4, 11, 16–9.

kolwiek[14], oraz z imperatywu ocalenia z tego możliwie największej części. Dzięki temu do – nie tak licznych wśród językoznawców – specjalistów od typologii językowej w ostatnich dekadach trafiły i trafiają dziesiątki gramatyk czy słowników języków dotychczas nieopisanych, a czołowe domy wydawnicze inicjują w tym celu całe biblioteki[15].

Profesor Pogonowski od początku „stanu wojennego" był mocno i z odwagą zaangażowany w pomoc ofiarom tego „stanu" spośród pracowników UAM w ramach specjalnej sankcjonowanej władzą rektorską komisji (nazywano to „wyciąganiem"), a także w działalność w NSZZ Solidarność przy UAM (cf. Mikołajczak 2005:31–32), choć później, przy innej okazji, użył argumentu (jak najsłuszniejszego), że nie każdy rodzi się bohaterem (tym bardziej szacunek budzi to pierwsze). Czyli z wroniego punktu widzenia Pogonowski knuł przeciwko „wojnie" od początku jej prowadzenia. Ale dużo też wtedyśmy rozmawiali, także o sprawach „ważnych" – jak np. o językoznawstwie, językowych strukturach czy klasyfikowaniu języków według tych struktur. Interesowały nas wtedy nośniki informacji leksykalnej i nośniki informacji kategorialnej (≈ gramatycznej), ich wzajemne proporcje w poszczególnych językach i wpływ na ich struktury decydujące o klasyfikowaniu języków do poszczególnych typów językowych. Na przykład typologia morfologiczna pozwalała na dość łatwe wnioski, że nasz fleksyjny język rodzimy był bardziej syntetyczny niż wysoce analityczne języki Azji Południowo-Wschodniej (jak chiński,

[14] Ciągle do 70∼75% języków znamy tylko z nazwy i wiemy tylko, że istnieją, znamy ich lokalizację, o niektórych ludach je używających zebraliśmy nawet stosunkowo dużo informacji, ale niekoniecznie lingwistycznej. Jakąkolwiek dokumentację (nieliczne teksty, często fragmenty Biblii i innych pism chrześcijańskich, opisy wybranych detali struktury – np. system fonologiczny lub jego fragment, listy wyrazów itp., często stare, często niedokładne i niepewne, nieprofesjonalne (nie lingwiści je zapisywali), niemożliwe do zweryfikowania) ma z pewnością mniej niż jedna czwarta ze wszystkich języków. Dopiero niedawno Nauka zdała sobie sprawę, że każdy język i każda kultura to niezastępowalne składowe dziedzictwa całej ludzkości, każda śmierć języka i każda śmierć odrębnej lokalnej kultury to nieodwracalna strata i tragedia ekologiczna w wymiarze ogólnoludzkim, zaś zachowanie tych walorów, nawet jeśli tylko w formie spetryfikowanej (rejestracja pisemna czy audiowizualna), to właśnie imperatyw dla Nauki.

[15] Jak Mouton Grammar Library, Brill's Studies in South and Southwest Asian Languages, Pacific Linguistics, Sinitic Languages of China,中国新发现语言研究丛书 (*Zhongguo Xinfaxian Yuyan Yanjiu Congshu* 'studia nad nowoodkrytymi językami ChRL') czy Endangered Languages of the Pacific Rim (*ELPR*, Japan), by dać tylko kilka przykładów.

szczególnie klasyczny *wenyan* 文言, ale też inne języki sino-tybetańskie, tajskie, miao-yao∼hmong-mien, liczne austroazjatyckie itp.) czy nawet aglutynacyjne języki turkijskie, mongolskie i tunguskie, ale dużo mniej syntetyczny niż języki Azji Północno-Wschodniej (m.in. „paleoazjatyckie", aleuto-eskimoskie czy północnoamerykańskie indiańskie), albo że im więcej w języku jest nośników informacji zgramatykalizowanej (kategorialnej), tym „mniejsza potrzeba" w nim nośników informacji leksykalnej.

Dobrych przykładów dostarczała zawartość eskimoskich słowników – np. część „słownikowa" (∼ hasłowa) dużego słownika alaskańskiego języka jupik (= yupik-angielski; Jacobson 1984:39–624) podzielona jest na cztery części: „Bases" (mniej więcej ⟨nośniki znaczenia leksykalnego⟩, ss. 41–419), „Postbases" (423–602, mniej więcej ⟨nośniki znaczenia kategorialno-częściowo-leksykalnego⟩), „Endings" (605–616, mniej więcej ⟨nośniki znaczenia kategorialnego⟩ – deklinacyjne informujące o przypadku – przypadków jest siedem, i koniugacyjne informujące o trybie – trybów jest 13) oraz „Enclitics" (619–624, coś w rodzaju ⟨nośników znaczenia kategorialnego⟩ – samodzielne „sufiksy" w pozycji *finalnej* wyrazu *po końcówkach*, mogące występować pojedynczo, w sekwencji 1 + 1, rzadziej 1 + 1 + 1, lub nie wystąpić wcale). Słownik czukockiego jupika (= yupik-rosyjski; Rubcowa 1971) oferuje ciekawy do przemyśleń materiał w postaci listy *przykładów* form wyrazowych utworzonych od jednego niesamodzielnego nośnika znaczenia leksykalnego кимухси- 'sanie z uprzężą (do psiego zaprzęgu)' ciągnącej się przez 35 stron gęstego druku (610–644; poprzedza ją lista mniej więcej ⟨nośników znaczenia kategorialnego⟩ takiegoż druku na ss. 595–610)[16]. W latach 1983–1984 opublikowane zostały (Lowe) trzy paralelne wobec siebie słowniki w układzie tematycznym trzech zachodniokanadyjskich etnolektów eskimoskich – kangiryuarmiut (125), uummarmiut (175) i siglit (215) grupowanych pod wspólną nazwą inuvialukt (515)[17] – w każdym z nich liczba stron przedstawiających

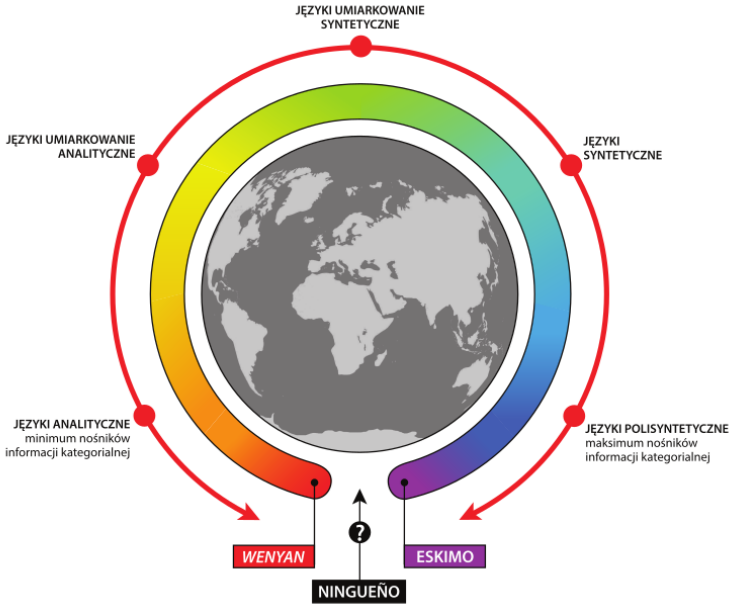
[16] Zob. przykłady wyrazów z języków polisyntetycznych w Majewicz 1989:204–208, cf. też ss. 193–203.

[17] Użytkownicy ich używają endonimu Inuvialuit (Western Arctic Eskimo) dla odróżnienia siebie od eskimoskich mieszkańców centralnej i wschodniej części Arktyki kanadyjskiej. Rzeczone słowniki przygotowano w sytuacji nadzwyczajnej: „because of the urgent situation prevailing in the Western Arctic with regard to the impeding loss of the dialects spoken there and the pressing need of teaching materials it has been necessary to develop basic linguistic descriptions of these dialects in a shorter time than one might ideally desire" (1984a:v). Populację „fluent speakers" wskazują liczby w nawiasach przy glottonimach.

informację kategorialną („suffixes") przewyższa tę z informacją leksykalną (odpowiednio 1983:77–184 wobec 1–68, 1984:85–200 wobec 1–74 oraz 1984a:91–229 wobec 1–80). W materiale zatytułowanym *Eskimo Word Structure* czytamy: „A dictionary of a dialect of the Eskimo language will inevitably differ in many respects from a dictionary of English or any other European language. When comparing the words of an Eskimo text with those of an English text, one is immediately struck [. . .] by the difference between word length in the two languages" (1983:xx). Warto tu przytoczyć jeszcze jeden cytat z drugiego rozdziału najobszerniejszej gramatyki eskimoskiej (ponad 1700 stron) zatytułowanego „A Word in Yupik": „The 'word' weighs heavily in the grammar of C[entral] A[laskan] Y[upik] (and other Eskimo languages, for that matter) perhaps much more than those of a majority of the world's languages, though the word would be a fundamental and inevitable entity in any human language, either an isolating language as Classical Chinese or a 'polysynthetic' one as Eskimo" (Miyaoka 2012:18). Stąd nie powinno dziwić, że 106-stronicowy skrypt gramatyki labradorskiego eskimoskiego F. W. Peacocka uzupełnia 120-stronicowy słownik afiksów. W pan-słowniku strukturalnie bliskich etnolektom eskimoskim etnolektów aleuckich (Bergsland 1994) też rdzeń części hasłowej jest podzielony na „Main Entries and Subentries" (1–465) i „Suffixes" (467–559).

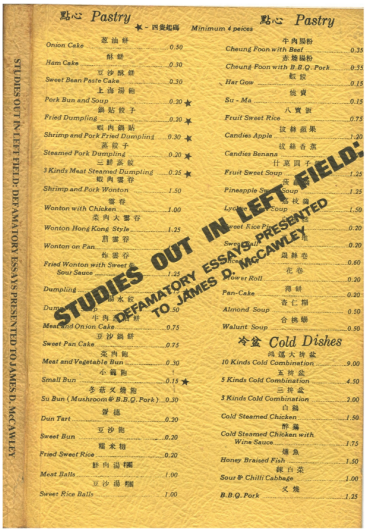
Modelowo zatem jest tak, że jeśli najbardziej analityczny język to ⟨ciąg nośników znaczenia leksykalnego⟩, w którym funkcję każdego jego elementu (≈wyrazu) wyznacza jego miejsce w szyku (każdy element jest wyrazem, stąd zwodnicze określenie ⟨języki monosylabiczne⟩), to najbardziej (∼ skrajnie) syntetyczny język to ⟨ciąg nośników znaczenia kategorialnego⟩, w którym funkcję każdego elementu również wyznacza jego miejsce w szyku. Tak koło się domyka (zob. rys. s. 190).

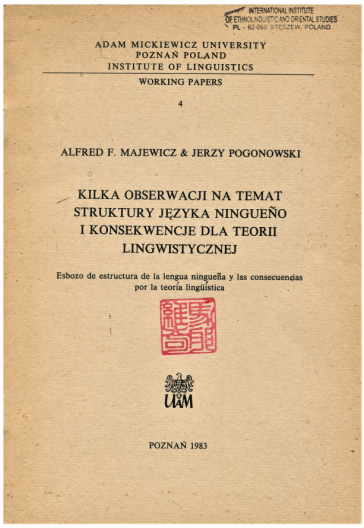
Powstaje pytanie o granice wyrazu np. w językach eskimoskich – otóż te granice wyznacza *inicjalna pozycja* nośnika znaczenia leksykalnego, zaś inwentarz elementów finalnych wyrazu jest ilościowo ograniczony. I drugie pytanie – czy istnieje i czy może istnieć język skrajnie polisyntetyczny – tzn. czy koło może się zamknąć na granicy styku języków skrajnie analitycznych i skrajnie polisyntetycznych. Właśnie dla przedstawienia takiego języka – ⟨yumańskiego języka ningueño z jednej z dolin (Valle de los Ningueños) Sierra Vizcaíno na pograniczu pustyni Desierto de Vizcaíno w meksykańskim stanie Baja California Sur⟩ – powód do *legalnego zwo-*



łania na mocy dekretu (uznanego po latach za nielegalny) *nielegalnego zebrania* naukowego poczytaliśmy za zasadny.

Zarys organizacji materiału do przedstawienia naukowemu zebraniu i światu wykluł się w zasadzie podczas jednej nocy pod wpływem całego wachlarza środków motywujących, w tym kultowego Festschriftu na „33cie lub 34te urodziny Jamesa McCawleya" (Zwicky i in.). Jego tytuł był i pozostaje niezwykłym i zaskakującym dla wszystkich, którzy nie znali postaci ani biografii uczczonego nim beneficjenta owego mocno nietypowego jubileuszu, choć reprezentantom głównej dyscypliny uprawianej przez naszego Jubilata jednak powinien być znany choćby tytuł jednego z głównych dokonań McCawleya, szczególnie w jego drugim, mającym ponad 650 stron objętości, wydaniu z 1993 roku. Piszącemu ten tekst bliższe były jednak inne jego dzieła naukowe, jak „fonologiczny komponent gramatyki japońskiej" (1968) dla napisania własnej „fonologii japońskiej" (1975, ^{2}1986), czy gustowny akademicki słownik-przewodnik do kompetentnego korzystania z menu w chińskich restauracjach świata (1984;





Okładka Zwicky et al. Okładka Majewicz & Pogonowski 1983

okładka Zwicky et al. też przedstawia... chiński jadłospis). Przedwcześnie i tragicznie zmarły McCawley zaczął studia uniwersyteckie w wieku lat szesnastu (University of Chicago), uzyskując stopień MA w zakresie *matematyki*, językoznawstwa uczył się u Erica Hampa, doktorat uzyskał u Chomsky'ego w MIT (wymyślając swemu promotorowi za to podwaliny „generatywnej semantyki"[18]), był lingwistą o wyjątkowo szerokim spectrum zainteresowań, poliglotą (od jidysz, serbsko-chorwackiego, niemieckiego i hiszpańskiego, po fiński, chiński czy japoński – i to też jeno przykłady), postacią popularną, szeroko znaną, cenioną za „błyskotliwość", należał do tych, którzy się nauką dla wyniku nie tylko mozolili, ale i potrafili się doskonale nią bawić[19]. Podobnie jak Pogonowski – nie kierował

[18] W nekrologu (Fox, 1999) czytamy: „Originally conceived as an extension of Noam Chomsky's work, generative semantics was regarded by many hard-line Chomskyan linguists, including Dr. Chomsky himself, as a theoretical slap in the face". Zob. też obszerniejszy tekst Johna Lawlera w *Language* 79/3 (2003), 614–25.

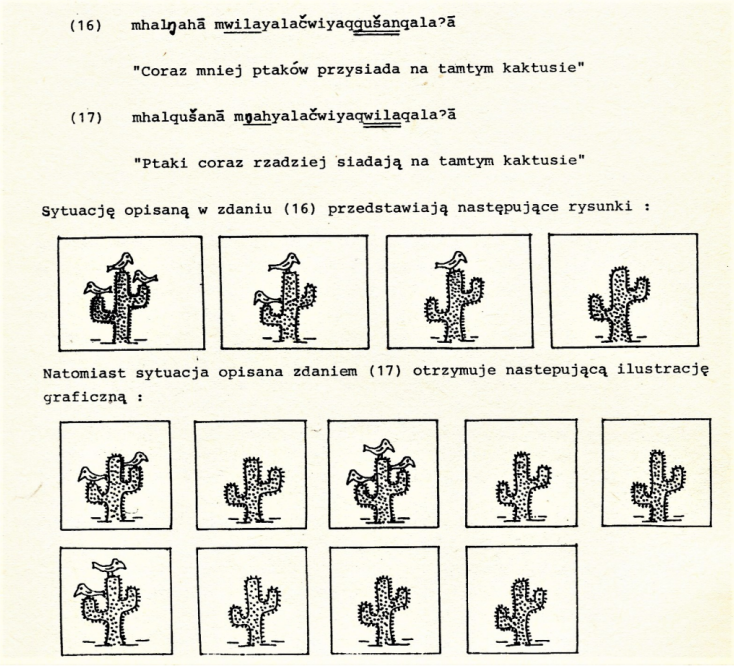
[19] Zob. choćby tytuły jednej z jego książek – *Thirty Million Theories of Grammar* (1982) i innego niż już przywołany dedykowanego mu Festschriftu – *The Joy of Grammar* (1992).

samochodem, choć daleko więcej niż to i dyplom z matematyki by ich łączyło.

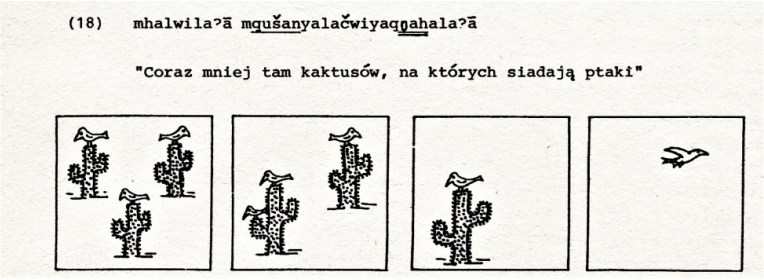
Zebranie się odbyło przy nadspodziewanie dużej frekwencji uczestników (zakazane jednak kusi, a okazji do legalnego wyrywania się z domu był deficyt[20]) i bardzo żywej dyskusji, mimo egzotyki „heretycki" temat wciągnął. Tekst został wydany (1983) i zapewne do dziś stanowi jedyną pozycję w pod-poddziale ⟨ningueño język⟩ poddziału ⟨indiańskie języki⟩ działów ⟨języki świata⟩ lub ich odpowiedników w rzeczowych katalogach Biblioteki Narodowej i innych książnic, do których publikacja trafiła (a trafiła). Załączona ilustracja pokazuje fragment materiału języka z objaśnieniem słownym i wizualnym, ujawniając przy tym też plastyczne zdolności i wyobraźnię ilustratora – Jerzego Pogonowskiego. Książeczka spotkała się też z zainteresowaniem w pewnych kręgach lingwistów amerykańskich, także z kręgu Jamesa McCawleya. Drugim owocem pracy konceptualnej przywołanej wspomnieniami nocy był ostateczny kształt wspólnego artykułu (1984) dotyczący różnorodności eksponentów (∼ wykładników) znaczeń kategorialnych w językach i ich inwentarzy w poszczególnych językach oraz postulatów co do wykorzystania tego wszystkiego w dalszej perspektywie badań nad uściślaniem typologii coraz większej i rosnącej liczby języków już wystarczająco dla takich celów opisanych.

Jerzy pozwolił sobie nadto zadworować ze stanu spraw, jaki nas otaczał, indywidualną już, acz od dawna zamierzaną inicjatywą pospiesznie „na okoliczność" zmaterializowaną w postaci zeszytu z ćwiczeniami z językoznawstwa dla studentów (1983), w którym pobrzmiewają echa zmagań z ningueño, jak np. w pytaniu 19. (s. 9) o „język o wszystkich głoskach bezdźwięcznych", poleceniu złożenia tekstu „z ok. 20. wyrazów" i usunięcia zeń raz wykładników wszystkich znaczeń gramatycznych, drugi raz – wykładników wszystkich znaczeń leksykalnych i odpowiedzi na pytanie „w którym przypadku łatwiej zrekonstruować tekst i dlaczego?" czy pytaniu 18(ii) „czy możliwy jest język, w którym wszystkie morfy są gramatyczne" (s. 12). Pojawiły się jednak też takie zadania, jak porównanie wypowiedzi „kupiłem korzystnie paczkę kawy" i „sprzedałem korzystnie paczkę kawy" (dzisiaj niezrozumiałych, wówczas wręcz niebezpiecznych;

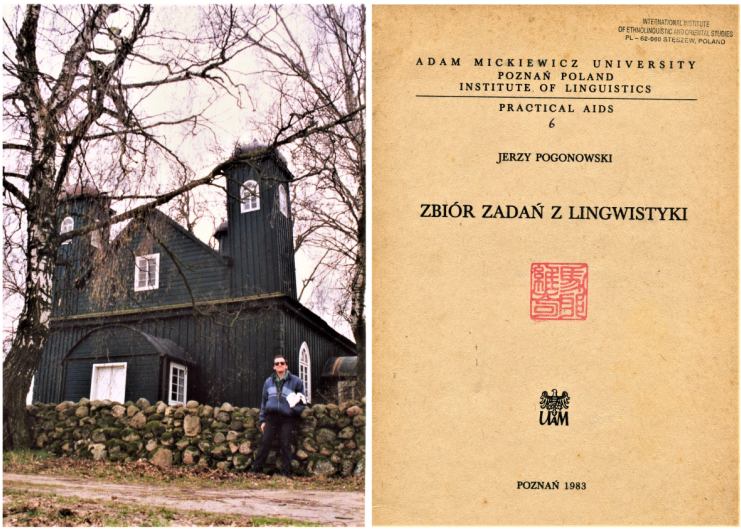
[20] Na ustawicznie ponawiane pytanie o koniec koszmaru pewnego razu padła odpowiedź, skądinąd bardzo precyzyjna, sprowadzająca się do stwierdzenia, że ów „stan będzie trwał tak długo, jak będzie trwał" (co się nie ziściło: został on zniesiony 22 lipca 1983 *po* wprowadzeniu wszystkich jego najdotkliwszych zakazów i przepisów do obowiązujących kodeksów prawnych).



[. . .] należy przypuszczać, że następujące zdanie (nie znajdujące się wśród naszych danych materiałowych) będzie najprawdopodobniej również całkowicie poprawne w języku ningueño:



Fragmenty stron 13–4 Majewicz & Pogonowski 1983 z materiałem ningueño i rysunkami Jerzego Pogonowskiego



J. Pogonowski przy meczecie w Kruszynianach, po prawej: okładka Pogonowski 1983

s. 10, ćw. 9;), pytanie „jakimi informacjami musi dysponować w roku 2083 marsjański polonista", który „odnajdzie w ruinach jednego z budynków użyteczności publicznej w Warszawie wyskrobany na ścianie napis ⟨KAŻDA WRONA SWÓJ OKONEK CHWALI⟩, aby mieć pewność, że trafnie rozumie znaczenie napisu" (s. 6, ćw. 11), czy pytanie o rodzaj spójności semantycznej w zdaniu „*Trybuna Ludu* jest organem PZPR, więc nie powinieneś owijać w nią śledzi", któremu towarzyszy „wyjaśnienie dla młodszego czytelnika", co to jest śledź i dlaczego ich nie ma, choć „przed II wojną światową stanowił istotny składnik pożywienia biedoty w Polsce" (s. 14, ćw. 13(ii)).

To wszystko „przechodziło" przez urząd cenzury[21], ale cenzor, który zacięcie kroił akurat naukowy tekst o produkcji ziemniaków, przystawiał stosowną pieczątkę na okładce „egzemplarza okazowego" nie dlatego, że chciał, zaniechał czy tolerując – „odpuścił" (nie wolno mu było!); do cenzury delegowaliśmy w takich przypadkach naszego wspaniałego kolegę bibliotekarza, który ucieleśnieniem niewinności absolutnej wypisanej na

[21] Nazywał się bardziej złowieszczo: Wojewódzki Urząd Kontroli Prasy, Publikacji i Widowisk w Poznaniu.

Za nami Świsłocz, zasieki i Białoruska Socjalistyczna Republika Radziecka

swoim iście anielskim obliczu „gwarantował" ideologiczną nieskazitelność. „Przybite" było „przybite", a cenzor nie miał interesu w przyznaniu się do braku partyjnej czujności.

Takie były czasy (to dla annałów Nauki). Takie się w pamięci kołaczą reminiscencje znad Świsłoczy (to dla Jerzego).

Scriptum fuit in IIEOS institutione
Stenseviae die IX mensis Septembris anno MMXXI

Źródła

Bergsland, Knut 1994. *Aleut Dictionary // Unangam Tunudgusii. An unabridged lexicon of the Aleutian, Pribilof, and Commander Islands Aleut Language*. Fairbanks: Alaska Native Language Center, University of Alaska.

Ostatnia granica, za dalą dal. . . po Czukotkę i Władywostok, a za Wielką Wodą Ameryka.

Derbyshire, Desmond C. and Geoffrey K. Pullum (eds.) 1986. *Handbook of Amazonian Languages, Vol. 1*. Berlin – New York – Amsterdam: Mouton de Gruyter. Vols. 2 (1990), 3 (1991), 4 (1998).

Dziesięć lat Instytutu Językoznawstwa Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu // Ten years of the Institute of Linguistics at the Adam Mickiewicz University, Poznań, Poland (1973-1983). Occasional Papers 1. Poznań: Adam Mickiewicz University Institute of Linguistics. Wersja angielskojęzyczna: Lingua Posnaniensis 26 (1983), 9–40.

Fox, Margalit 1999. „James D. McCawley, Linguist Who Stirred a Rift, Dies at 61". *The New York Times* April 14.

Humboldt, Wilhelm von 1836. *Über die Verschiedenheit des menschilschen Sprachbaues und ihren Einfluss auf die geistige Entwickelung des Menschengeschlechts*. Berlin: Druckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften.

Information Bulletin of the Department of Languages of Asia and Africa 2. 1990. Poznań: Adam Mickiewicz University Institute of Linguistics Department of Languages of Asia and Africa.

Inoue, Kazuko 1969. *A Study of Japanese Syntax*. The Hague – Paris: Mouton.

Jacobson, Steven A. 1984 [^{2}2012 vols. 1–2]. *Yup'ik Eskimo Dictionary*. Fairbanks: Alaska Native Language Center, University of Alaska. ^{2}2012/2:1013-247 "English-to-Yu'pik Index".

Jankowski, Henryk 2007. „Orientalistyka poznańska" w: Tadeusz Majda (red.) *Szkice z dziejów polskiej orientalistyki*, tom 4. Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego. Ss. 127–70.

LOSP 1991–2014: *Linguistic and Oriental Studies from Poznań* 1 (1992), 2 (1995), 3 (1999), 4 (1999), 5 (2003), 6 (2004), 7 (2005), 8 (2008), 9 (2009); Monograph Supplement 1 (1991), 2 (1993), 3 (1994), 4 (1999), 5 (2000), 6 (2001), 7 (2001), 8 (2014).

Lowe, Ronald 1983–4: 1983. *Kangiryuarmiut Uqauhingita Nuniktittitdjutingit // Basic Kangiryuarmiut Eskimo Dictionary*; 1984. *Uummarmiut Uqalungiha Mumikhitchtr̂utingit // Basic Ummarmiut Eskimo Dictionary*; 1984a. *Siglit Inuvialuit Uqausiita Kipuktirutait // Basic Siglit Inuvialuit Eskimo Dictionary*. Inuvik, Northwest Territory: Committee for Original People Entitlement.

Majewicz, Alfred F. [1973], ^{2}1990. *Some Aspects of the Verb Phrase Structure in English, Indo-European and Non-Indo-European*. Poznań: Adam Mickiewicz University Institute of Linguistics.

Majewicz, Alfred F. [1975] ^{2}1986. *A Contrastive Analysis of Polish and Japanese Phonemic and Phonetic Systems with Special Reference to the Teaching of Japanese in Poland*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Majewicz, Alfred F. 1989. *Języki świata i ich klasyfikowanie*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Majewicz, Alfred F. 1990. *The Institute of Linguistics at the Adam Mickiewicz University in Its 15th Year (1983-1988)*. Occasional Papers 1. Poznań: Adam Mickiewicz University Institute of Linguistics.

Majewicz, Alfted F. & Jerzy Pogonowski 1983. *Kilka obserwacji na temat struktury języka ningueño i konsekwencje dla teorii lingwistycznej // Esbozo de estructura de la lengua ningueña y las consecuencias por la teoría lingüüística*. Working Papers 4. Poznań: Adam Mickiewicz University Institute of Linguistics.

Majewicz, Alfted F. & Jerzy Pogonowski 1984. „On Categorial Marking in Natural Languages". *Lingua Posnaniensis* 26, 55–68.

McCawley, James D. 1968. *The Phonological Component of a Grammar of Japanese*. The Hague – Paris: Mouton.

McCawley, James D. 1984. *The Eater's Guide to Chinese Characters*. Chicago and London: The Chicago University Press.

McCawley, James D. [2] 1993. *Everything that Linguists Have Always Wanted to Know about Logic*. . . *but Were Ashamed to Ask*. [Pierwsze wydanie (508 ss.) 1981].

Meskill, Robert H. 1970. *A Transformational Analysis of Turkish Syntax*. The Hague – Paris: Mouton.

Mikołajczak, Stanisław (red.) 2005. *Serwis Informacyjny KZ NSZZ Solidarność przy UAM w Poznaniu 1981, tom 1*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Miyaoka, Osahito 2012. *A Grammar of Central Alaskan Yupik (CAY)*. Mouton Grammar Library [tom] 58. Berlin/Boston: De Gruyter Mouton.

Peacock, F[rederick] W[illiam] br. *Eskimo Grammar. Labrador Dialect* oraz *Eskimo Affixes* [quasi-publikacje maszynopisowe]. St. John's, Newfoundland: Memorial University of Newfoundland.

Pogonowski, Jerzy 2016. „Dwie uwagi o języku matematyki" w: Maria Kurpaska [&] Tomasz Wicherkiewicz [&] Maciej Kanert (eds.). *Thesaurus gentium & linguarum. A Festschrift to honour Professor Alfred F. Majewicz*. Poznań: Jeżeli P To Q. Ss. 295–304.

[Rubcowa] Рубцова, Е[катерина] С[еменовна] 1971. *Эскимосско-русский словарь*. Москва: Издательство «Совецкая Энциклопедия».

Warotamasikkhadit, Udom 1972. *Thai Syntax. An Outline*. The Hague – Paris: Mouton.

Wicherkiewicz, Tomasz 1994. *Information Bulletin of the Department of Languages of Asia and Africa 3 (and the last one)*. Poznań: Adam Mickiewicz University Chair of Comparative Linguistic & Oriental Studies Department of Languages of Asia and Africa.

Zgółka, Tadeusz 1996. „Wydział Neofilologii" w: *Kronika Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu za lata akademickie 1990/1991–1992/1993 za rektoratu prof. dr. hab. Jerzego Fedorowskiego*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Zwicky, Arnold M. [&] Peter H. Salus [&] Robert I Binnick [&] Anthony L. Vanek (eds.) [1971]. *Studies out in Left Field: Defamatory Essays Presented to James D. McCawley on the Occasion of His 33rd or 34th Birthday*. Current Inquiry into Language and Linguistics 4. Carbondale and Edmonton: Linguistic Research, Inc. Reprint[22]: John Benjamins Publishing Company (1992).

[22] Promowany jako „Reprint of the original edition. Transformational Grammar's Underground Classic! Back in Print in the Nick of Time! (Just as the photocopies were getting too fuzzy to read!) Here is the complete and unexpurgated version of the legendary lost classic Available".

Gdzie jest najwięcej tolerancji?

Joanna Grygiel

Skąd to się wzięło?

Gdy dowiedziałam się o pomyśle wydania tego tomu, zaczęłam się zastanawiać, co powinnam napisać. Czy ma to być artykuł naukowy, czy też raczej opowiadający o Jurku Pogonowskim z mojej skromnej perspektywy? Ponieważ nie umiałam się zdecydować, postanowiłam połączyć obie te rzeczy i napisać o naszych spotkaniach w przestrzeniach tolerancji i co z tego wynikło.

Po raz pierwszy spotkałam Jurka w maju 1998 r., a było to w Karpaczu, na konferencji *Zastosowania logiki w filozofii i podstawach matematyki*. Piotr Wojtylak namówił go wtedy (ja nie miałam nawet tyle odwagi, by o to prosić) na udział w naszej zakopiańskiej konferencji *Zastosowania algebry w logice i informatyce*. I tak rok później, w maju 1999 r., Jurek przyjechał do Zakopanego i wygłosił odczyt „O przestrzeniach tolerancji i opozycji (*On tolerance and opposition spaces*)". Pomimo upływu lat pamiętam ten odczyt doskonale (a w szczególności ilustrację z Bitwą pod Grunwaldem), choć w tamtym momencie zupełnie nie zdawałam sobie sprawy ze związku tej tematyki z moją działalnością badawczą.

Zajmowałam się wtedy problemem dekompozycji krat dystrybutywnych i wygłaszałam odczyt „Kraty dystrybutywne o danej kracie połączeń". Badania te wywodziły się od pewnej operacji sklejania krat, zdefiniowanej

Joanna Grygiel e-mail: jgrygiel@swps.edu.pl
Katedra Informatyki, Uniwersytet SWPS, Warszawa

przez Wrońskiego [22] jako generalizacja operacji „masztowania" wprowadzonej przez Jaśkowskiego [14], Piotr Wojtylak zainteresował mnie pracą *Finite distributive lattices as sums of Boolean algebras* [15], co zaowocowało między innymi naszym wspólnym artykułem *The sum operation and link lattices* [11].

Niewiele później okazało się, że wymyślone wspólnie z Piotrem Wojtylakiem kraty połączeń w kratach dystrybutywnych są tym samym (albo raczej prawie tym samym), co szkielety tych krat, opisane znacznie wcześniej m.in. przez Christiana Herrmanna [13]. Co więcej, szkielet skończonej kraty dystrybutywnej jest kratą bloków najmniejszej sklejonej tolerancji tej kraty (np. [6, 3] lub [9]). I tym sposobem znalazłam się w przestrzeniach tolerancji, w których próbuję szukać swoich dróg do dzisiaj, nierzadko zresztą lądując na manowcach.

Krótka podróż po krainie tolerancji

Pierwsze formalne podejście do teorii tolerancji pochodzi od Zeemana, który użył określenia „tolerancja" na oznaczenie relacji zwrotnej i symetrycznej, opisał pewne jej własności i zastosował do biologii teoretycznej w pracy „Topology of the brain and visual perception" [23]. Niemniej sama idea pochodzi od Poincarégo [19], który zauważa, że przechodniość identyczności w świecie rzeczywistym zawsze jest wątpliwa, gdyż identyczność obiektów niesie ze sobą pewien zakres błędu, a przechodniość może te błędy kumulować. Dlatego też lepiej jest mówić o podobieństwie, bliskości, byciu identycznym z pewną tolerancją błędu.

Ta idea jest niezwykle uniwersalna i dotyczy nie tylko rozmaitych dziedzin matematyki, ale nauki w ogólności. Wydaje się wręcz niewiarygodne, że tak prosta definicja (relacja binarna zwrotna i symetryczna w pewnym zbiorze) może zaowocować tak bogatymi teoriami, jak to się stało w przyszłości.

Teoria przestrzeni tolerancji, czyli zbiorów wraz z określonymi na nich relacjami tolerancji, zaczęła się szybko rozwijać w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku, znajdując szerokie zastosowania, w szczególności w teorii informacji (np. [1]) i lingwistyce. Tu szczególne zasługi ma Jurek Pogonowski. Na liście jego publikacji z roku 1978 znalazłam zamieszczoną w „Studiach Metodologicznych" [16] recenzję książki Szrejdera *Równość,*

podobieństwo, porządek [21]. Myślę, że ta praca stała się inspiracją do użycia pojęcia tolerancji w badaniach lingwistycznych, czego pokłosiem stał się artykuł [18] oraz książka *Tolerance spaces with applications to linguistics* [17].

Dla matematyki, a konkretniej dla algebry i teorii krat, tolerancje odkryli Chajda i Zelinka [4], którzy potraktowali je jako naturalne uogólnienie relacji kongruencji. Takie podejście wiązało się z oczywistą próbą przeniesienia rezultatów otrzymanych dla kongruencji na grunt przestrzeni tolerancji i zaowocowało niezliczoną ilością rozmaitych podejść do tego zagadnienia i mnogością ciekawych wyników. Część tej historii spróbowałam opisać w pracy *Many faces of tolerances* [10].

Na wiele pytań dotyczących tolerancji w kratach i ich zastosowań udało się odpowiedzieć, ale niektóre ciągle pozostają otwarte i o jednym z nich chciałam tu opowiedzieć. A było tak. W pewnym okresie udało mi się namówić do wspólnej pracy na niwie tolerancji Kasię Grygiel, co nawet przyniosło nam w dorobku wspólne artykuły. Gdy przygotowywałyśmy jeden z nich [12], wypłynęło pytanie o liczbę tolerancji w kratach skończonych o ustalonej liczbie elementów. Jednak, jak to często bywa w matematyce, proste pytania nie mają prostych odpowiedzi. Można było jedynie liczyć na znalezienie jakiejś dobrej aproksymacji, a zatem kolejne pytanie brzmiało: „W których kratach jest najwięcej tolerancji?". Naturalnym kandydatem wydaje się łańcuch. Czy jednak tak jest w istocie? Na to pytanie nie znamy odpowiedzi do dzisiaj.

A teraz trochę konkretów

Zanim sformułuję formalnie problem, muszę wprowadzić trochę definicji i faktów. Wszystkie poniższe rozważania dotyczą krat skończonych, a zatem mówiąc o kracie $\mathbf{L}$, będę miała na myśli zawsze kratę skończoną, chociaż część przedstawianych poniżej definicji i twierdzeń pozostaje prawdziwa dla wszystkich krat bądź dla krat o skończonej wysokości.

Niech $\mathtt{Tol}(\mathbf{L})$ oznacza zbiór wszystkich tolerancji kraty $\mathbf{L}$. Zbiór ten, uporządkowany przez inkluzję, tworzy kratę algebraiczną [3]. Krata wszystkich kongruencji kraty $\mathbf{L}$, którą oznaczymy $\mathtt{Con}(\mathbf{L})$, jest podzbiorem $\mathtt{Tol}(\mathbf{L})$, ale niekoniecznie podkratą kraty tolerancji. Z drugiej strony wia-

domo [8], że każda tolerancja w $\mathrm{Tol}(L)$ jest obrazem pewnej kongruencji poprzez epimorfizm kratowy.

Tolerancję T kraty L nazywamy sklejoną [20], jeśli jej tranzytywne domknięcie jest relacją totalną L^2. Wszystkie tolerancje sklejone kraty L tworzą podkratę kraty $\mathrm{Tol}(L)$, którą oznaczymy $\mathrm{Glu}(L)$. Zauważmy, że relacja totalna L^2 jest elementem największym zarówno w $\mathrm{Glu}(L)$, jak i w $\mathrm{Con}(L)$, będąc jednocześnie jedynym elementem wspólnym tych krat. Najmniejszą tolerancję sklejoną w kracie L nazywamy tolerancją szkieletową w L i oznaczamy $\Sigma(L)$.

Załóżmy, że $H \subseteq L^2$ jest zbiorem niepustym. Oznaczmy, odpowiednio, przez $\mathrm{tol}(H)$ i $\mathrm{con}(H)$ tolerancję i kongruencję generowane przez H w L, tzn. najmniejszą tolerancję/kongruencję zawierającą H. Ponadto niech $\mathrm{Int}(L)$ oznacza zbiór wszystkich przedziałów w kracie L, a $\mathrm{PrInt}(L)$ zbiór wszystkich przedziałów pierwszych w L, tzn. przedziałów $[a, b]$ takich, że a bezpośrednio poprzedza b, co będziemy zapisywać $a \prec b$. Wiadomo (zob. [2]), że tolerancja szkieletowa kraty skończonej L jest generowana przez zbiór wszystkich takich par $(a, b) \in L^2$, dla których $a \prec b$. Zatem $\Sigma(L) = \mathrm{tol}(\{(a, b)\colon [a, b] \in \mathrm{PrInt}(L)\})$, a krata tolerancji sklejonych $\mathrm{Glu}(L)$ jest filtrem głównym generowanym przez $\Sigma(L)$ w kracie wszystkich tolerancji $\mathrm{Tol}(L)$.

Niech $T \in \mathrm{Tol}(L)$ oraz $X \subseteq L$, gdzie $X \neq \emptyset$. Jeśli każde dwa elementy zbioru X są w relacji T, to X nazywamy preblokiem relacji T. Bloki to prebloki maksymalne względem relacji inkluzji. Bloki dowolnej tolerancji w kracie L są wypukłymi podkratami tej kraty ([2] i [3]). W przypadku krat skończonych bloki dowolnej tolerancji są po prostu przedziałami. Jeśli α i β są blokami tolerancji T, to $\{a \vee b\colon a \in \alpha, b \in \beta\}$ i $\{a \wedge b\colon a \in \alpha, b \in \beta\}$ są preblokami T. Czédli [5] wykazał, że bloki zawierające te prebloki są określone jednoznacznie i są, odpowiednio, sumą i iloczynem tych bloków w kracie wszystkich bloków, którą będziemy nazywać kratą ilorazową i oznaczać L/T. Oznacza to, że dowolną tolerancję można reprezentować za pomocą systemu jej bloków, indeksowanych elementami kraty ilorazowej.

Jest oczywiste, że w przypadku, gdy $T \in \mathrm{Con}(L)$, to blokami T są klasy kongruencji, które są parami rozłączne i tworzą podział zbioru L. W przeciwnym wypadku, co najmniej dwa różne bloki mają niepustą część wspólną. Zatem w przypadku tolerancji niebędącej kongruencją bloki tworzą pokrycie zbioru L, niebędące jego podziałem. W szczególności jeśli $T \in \mathrm{Glu}(L)$, to każde dwa bloki α i β takie, że $\alpha \prec \beta$ w L/T,

przecinają się niepusto. Kratę ilorazową $L/\Sigma(L)$ nazywa się szkieletem kraty L.

Wracamy do tytułowego pytania

Wróćmy do pytania wyjściowego: która krata n-elementowa ma najwięcej tolerancji i dlaczego jest to łańcuch? Odpowiedź na część drugą bierze się z obserwacji dotyczących kongruencji.

Pokażemy, że spośród wszystkich krat $\mathrm{Con}(L)$, gdzie $|L| = n$, najwięcej elementów ma krata kongruencji łańcucha n-elementowego. Zacznijmy jednak od przypomnienia pewnych faktów dotyczących kongruencji w kratach skończonych.

Szczególną rolę odgrywają tu przedziały pierwsze, ponieważ dowolna kongruencja Θ w skończonej kracie L jest sumą kongruencji generowanych przez przedziały pierwsze $[a, b] \in \mathrm{PrInt}(L)$ takie, że $(a, b) \in \Theta$. Ponieważ wiadomo, że krata kongruencji dowolnej kraty jest dystrybutywna (zob. np. [7]), zatem (na podstawie twierdzenia o strukturze skończonych krat dystrybutywnych) do opisania kraty $\mathrm{Con}(L)$ wystarczy znać zbiór częściowo uporządkowany $\mathrm{Con}_{\mathrm{Ji}}(L)$ wszystkich kongruencji sumowo-nierozkładalnych. Każda z tych kongruencji jest postaci $\mathrm{con}(\rho)$, gdzie $\rho \in \mathrm{PrInt}(L)$.

Aby opisać $\mathrm{Con}_{\mathrm{Ji}}(L)$ za pomocą przedziałów pierwszych, definiuje się następującą relację $\twoheadrightarrow$ na zbiorze $\mathrm{Int}(L)$ wszystkich przedziałów kraty L:

$$[a, b] \twoheadrightarrow [c, d] \text{ wtw } (a \leqslant c \text{ i } d = b \vee c) \text{ lub } (d \leqslant b \text{ i } c = a \wedge d).$$

Niech $\Rightarrow$ oznacza tranzytywne domknięcie $\twoheadrightarrow$. Wtedy $\Leftrightarrow$ zdefiniowane jako $[a, b] \Leftrightarrow [c, d]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[a, b] \Rightarrow [c, d]$ i $[c, d] \Rightarrow [a, b]$ jest relacją równoważności na $\mathrm{Int}(L)$.

Twierdzenie 4 ([7])**.** *Niech L będzie kratą skończoną. Relacja $\Rightarrow$ jest relacją quasi-porządku w $\mathrm{PrInt}(L)$. Klasy abstrakcji relacji $\Leftrightarrow$ tworzą zbiór częściowo uporządkowany dualnie izomorficzny ze zbiorem $\mathrm{Con}_{\mathrm{Ji}}(L)$ uporządkowanym przez relację porządku z kraty L.*

Niech $L_n = \langle \{0, \ldots, n-1\}, \leqslant \rangle$ oznacza n-elementowy łańcuch. Jesteśmy teraz gotowi, by udowodnić następujący fakt:

Twierdzenie 5. *Niech* L *będzie kratą o* n *elementach,* $n > 1$. *Wtedy*

$$2 \leqslant |\operatorname{Con}(L)| \leqslant |\operatorname{Con}(L_n)| = 2^{n-1}.$$

Dowód. Zauważmy, że $|\operatorname{PrInt}(L_n)| = n - 1$, a relacja $\Rightarrow$ na $\operatorname{PrInt}(L_n)$ jest identycznością. Ponieważ $\operatorname{Con}_{\mathsf{Ji}}(L_n)$ składa się z $n - 1$ nieporównywalnych elementów, więc krata $\operatorname{Con}(L_n)$ jest algebrą Boole'a o $n - 1$ generatorach, a zatem $|\operatorname{Con}(L_n)| = 2^{n-1}$.

Załóżmy teraz, że $|L| = n$ oraz L nie jest łańcuchem. Aby wykazać, że $|\operatorname{Con}_{\mathsf{Ji}}(L)| \leqslant |\operatorname{Con}_{\mathsf{Ji}}(L_n)|$, zgodnie z Twierdzeniem 4, wystarczy wykazać, że liczba klas abstrakcji relacji $\Leftrightarrow$ na $\operatorname{PrInt}(L)$ nie przekracza $n - 1$.

Niech $a \in L \backslash \mathsf{Mi}(L)$, gdzie $\mathsf{Mi}(L)$ oznacza zbiór wszystkich iloczynowo-nierozkładalnych elementów kraty L. Oznacza to, że istnieją różne elementy $b, c \in L$ takie, że $a \prec b$ and $a \prec c$. Stąd $[a, b], [a, c] \in \operatorname{PrInt}(L)$, $[a, b] \Leftrightarrow [c, b \vee c]$ i $[a, c] \Leftrightarrow [b, b \vee c]$.

Niech $x, y \in L$ spełniają warunki $c \leqslant x \prec b \vee c$ i $b \leqslant y \prec b \vee c$. Wtedy $[c, b \vee c] \twoheadrightarrow [x, b \vee c]$, więc $[a, b] \Rightarrow [x, b \vee c]$. Z drugiej strony $[x \wedge y, y] \twoheadrightarrow [a, b]$, gdyż $b \leqslant y$ oraz $a = x \wedge y \wedge b$. Ponadto $[x, b \vee c] \twoheadrightarrow [x \wedge y, y]$, gdyż $y \leqslant b \vee c$. Zatem $[x, b \vee c] \Rightarrow [a, b]$, co dowodzi, że $[a, b] \Leftrightarrow [x, b \vee c]$. Dowód, że $[a, c] \Leftrightarrow [y, b \vee c]$ jest analogiczny.

Ponieważ $[x, b \vee c], [y, b \vee c] \in \operatorname{PrInt}(L)$, więc wykazaliśmy, że dodatkowe przedziały pierwsze nie przekładają się na dodatkowe klasy abstrakcji relacji $\Leftrightarrow$. □

Niestety, ta metoda dowodu nie działa, jeśli zastąpimy kongruencje tolerancjami, gdyż kraty tolerancji są kratami modularnymi, ale nie muszą być dystrybutywne [3].

Poniższy problem:

Problem 1. Niech L będzie kratą o n elementach dla $n > 1$. Czy prawdą jest, że

$$|\operatorname{Tol}(L)| \leqslant |\operatorname{Tol}(L_n)|?$$

oraz równoważny mu:

Problem 2. Niech L będzie kratą o n elementach dla $n > 1$. Czy prawdą jest, że

$$|\operatorname{Glu}(L)| \leqslant |\operatorname{Glu}(L_n)|?$$

pozostają otwarte.

Podsumowanie

Zostawiam czytelników z tym pytaniem, mając nadzieję, że ktoś uzna je za warte namysłu. Nie ukrywam, że liczę także na, jak zwykle, cenny komentarz Jurka. Tu nasunął mi się taki limeryk, który zatytułowałam „Na konferencji w Zakopanem":

Raz pewien profesor z Poznania
nie miał nic do dodania.
Lecz było tak tylko raz,
że Pogon milczał jak głaz
podczas naszego spotkania.

Jest przecież wiadome, że niezależnie od liczby tolerancji w kratach Jurek ma w sobie całe przestrzenie tolerancji, nie można jednak zapominać o przestrzeniach (słusznej) opozycji.

Literatura

1. M. Arbib. Tolerance automata. *Kybernetika*, 3:223–233, 1967.
2. H.J. Bandelt. Tolerance relations of lattices. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 23:367–381, 1981.
3. I. Chajda. *Algebraic Theory of Tolerance Relations*. Univerzita Palackého Olomouc, Olomouc, 1991.
4. I. Chajda, and B. Zelinka. Lattices of tolerances. *Casopis pro pestovani matematiky*, 102:10–24, 1977.
5. G. Czédli. Factor lattices by tolerances. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, 44:35–42, 1982.
6. B. Ganter, and R. Wille. *Formal concept analysis. Mathematical Foundations*. Springer–Verlag, 1999.
7. G. Grätzer. *Lattice Theory: Foundation*. Springer Basel, 2011.
8. G. Grätzer, and G.H. Wenzel. Notes on tolerance relations on lattices. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 54:229–240, 1990.
9. J. Grygiel. *The concept of gluing for lattices*. Wydawnictwo WSP Częstochowa, 2004.
10. J. Grygiel. Many faces of lattice tolerances, 2019. *Bulletin of the Section of Logic*, 48(4):285–298, 2019.
11. J. Grygiel, and P. Wojtylak. The sum operation and link lattices. *Matematyka, Prace Naukowe WSP Częstochowa*, VI:23–28, 1999.
12. A. Górnicka, J. Grygiel, and K. Grygiel. A note on blocks of skeleton tolerances. *Acta Mathematica Hungarica*, 143(1):176–184, 2014.

13. C. Herrmann. S-verklebte Summen von Verbänden. *Mathematische Zeitschrift*, 130:255–274, 1973.
14. S. Jaśkowski. Recherches sur le système de la logique intuitioniste. *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, VI Philosophie des Mathématiques, Actualités Scientifiques et Industrielles*, 393:58–61, 1936.
15. J. Kotas, and P. Wojtylak. Finite distributive lattices as sums of Boolean algebras. *Reports on Mathematical Logic*, 29:35–40, 1995.
16. J. Pogonowski. Review of: Juliusz A. Szrejder, Równość, podobieństwo, porządek. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1975. *Studia Metodologiczne*, 17:183–185, 1978.
17. J. Pogonowski. *Tolerances spaces with applications to linguistic*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań, 1981.
18. J. Pogonowski. Przestrzenie tolerancji i opozycji. In M. Omyła, editor, *Skłonność metafizyczna. Bogusławowi Wolniewiczowi w darze*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 1997.
19. H. Poincaré (Author), and J.W. Bolduc (Translator). *Mathematics and science: Last essays (1913)*. Kessinger Publishing, 2010.
20. K. Reuter. Counting formulas for glued lattices. *Order*, 1:265–276, 1985.
21. J.A. Szrejder. *Równość, podobieństwo, porządek*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1975.
22. A. Wroński. Remarks on intermediate logics with axioms containing only one variable. *Reports on Mathematical Logic*, 2:63–76, 1974.
23. E.C. Zeeman. The topology of the brain and visual perception. In M.K. Fort, editor, *Topology of 3-Manifolds and related topics*, New Jersey, 1962.

Jaki to ptak, czyli czy Jerzy Pogonowski ma postać normalną?

Katarzyna Grygiel

1 Ptaki i matematyka

W dniu, gdy otrzymałam propozycję napisania tekstu do niniejszego tomu, Jan Willem Klop opowiedział mi o pewnym ciekawym problemie matematycznym, postawionym w 1993 roku przez Richarda Statmana [9]. Problem ten przedstawię w rozdziale 3, jednak w rzeczywistości stanowi on tylko wymówkę – wprowadzając pojęcia potrzebne do zrozumienia pytania o istnienie podwójnego kombinatora punktu stałego, wyposażymy się w odpowiednie narzędzia, aby móc stwierdzić, czy Jerzy Pogonowski występuje w postaci normalnej.

Ale co to wszystko ma wspólnego z ptakami? Otóż okazuje się, że właściwie... wszystko. Zacznijmy może od najważniejszego: zanurzamy się w świat logiki kombinatorycznej. Kto już kiedyś po tym świecie wędrował, ten zapewne wie, że kombinatory, czyli główni mieszkańcy tej krainy, to właśnie ptaki. Co wiecej – są to ptaki gadające! Jeśli jednak ktoś jeszcze się z tym światem nie zetknął, to nadrabianie zaległości warto rozpocząć od niezwykłej przygody, jaką będzie lektura jednej z książek Raymonda Smullyana: *To Mock a Mockingbird* [7]. Wydana po raz pierwszy w roku 1985, doczekała się polskiej wersji i ukazała się w 2007 roku pod niezwykle wdzięcznym tytułem *Przedrzeźniać przedrzeźniacza*, a przetłuma-

Katarzyna Grygiel e-mail: grygiel@tcs.uj.edu.pl
Instytut Informatyki Analitycznej, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

czył ją sam Jerzy Pogonowski [8]. Jeśli ktoś miałby ochotę zapoznać się z przystępnym streszczeniem, to na stronie [5] dostępne są slajdy z wykładu na temat książki, który Tłumacz wygłosił na konferencji AALCS XI.

A skoro już wspomniałam o AALCS, to nawiążę tu do krótkiej rozmowy z główną organizatorką tej konferencji. Otóż niedawno przeglądałam regał z książkami matematycznymi mojej rozmówczyni, gdy rzucił mi się w oczy z pozoru niepasujący do całej reszty tytuł: *Jaki to ptak?* [1]. I rzeczywiście, książka ta nie zawierała żadnych twierdzeń, nawet nie występował w niej przedrzeźniacz – stanowiła zgrabny opis różnych ptasich rodzin. Zapytałam więc o powód, dla którego znalazła się pomiędzy podręcznikami do analizy i głębokimi wywodami na temat logiki i oto, co usłyszałam: „Nie wiem, ale ta jest najciekawsza". Sugerując się tą odpowiedzią, postanowiłam, że mój tekst nie będzie przesadnie matematyczny i – wzorem Smullyana – wplotę do niego wątki ornitologiczne.

2 Wkraczamy do ptasiego świata

Pobieżny i miejscami zupełnie nieformalny opis podstawowych pojęć logiki kombinatorycznej i ich interpretacji w terminologii ornitologicznej podaję w tym rozdziale za [8]. Staram się również trzymać stosowanych tam oznaczeń, choć z powodów, które uważny Czytelnik z pewnością dostrzeże po lekturze rozdziału 4, pozwalam sobie na drobne różnice w oznaczeniach dla ptaka mędrca i ptaka następnika.

Logika kombinatoryczna jest pewnym systemem przepisywania termów. Aby nie nadużywać formalizmów, możemy owe termy, zwane kombinatorami, interpretować jako ptaki. Jeśli do ptaka A wypowiemy nazwę ptaka B, mieszkającego w tym samym co A lesie, to A odpowie, podając nazwę pewnego ptaka, którego oznaczamy AB. Nazwę takiego wyśpiewanego ptaka może usłyszeć ptak C, wówczas odpowie on ptakiem $C(AB)$ (który niekoniecznie będzie tym samym ptakiem, co ptak $(CA)B$, u którego – zgodnie z powszechnie przyjętą konwencją – pominiemy nawiasy i zapiszemy go jako CAB).

Na początku poznajmy dwa ptaki: *ptaka identycznościowego* i tytułowego *przedrzeźniacza*. Pierwszy z nich, oznaczany przez $\mathbf{I}$, jest w pewnym sensie złośliwy: słysząc nazwę dowolnego ptaka, odpowie tą samą nazwą. Możemy to zapisać jako równość $\mathbf{I}x = x$. Przedrzeźniacz natomiast, któ-

rego będziemy oznaczać przez **M**, ma inną dziwną cechę: słysząc nazwę ptaka x, odpowie nazwą takiego ptaka, którą wyśpiewa ptak x, słysząc swoją własną nazwę. Ujmując to krócej, $\mathbf{M}x = xx$.

Zanim poznamy kolejnych przedstawicieli ptasiej czeredy, musimy ustalić coś bardzo istotnego. Mianowicie dla dowolnych dwóch ptaków A i B istnieje na pewno taki ptak C, że dla dowolnego ptaka x zachodzi równość $Cx = A(Bx)$.

Powiemy, że ptak A *lubi* ptaka B, jeśli $AB = B$. Pierwsza z ptasich zagadek w [8] polega na pokazaniu, że w lesie zamieszkiwanym przez przedrzeźniacza każdy ptak lubi co najmniej jednego ptaka. Niektóre ptaki mogą lubić tylko same siebie (są to bardzo egocentryczne osobniki), z kolei ptak identycznościowy ma wyjątkowy charakter – pała sympatią do dowolnego ptaka!

Nie chcąc wchodzić w dalsze szczegóły ptasich cech, pozwolę sobie tylko zauważyć, że ptaki kombinatoryczne charakteryzują się przeróżnymi własnościami. Poza ptakami egocentrycznymi w naszej wędrówce możemy napotkać między innymi ptaki arystokratyczne, szczęśliwe, standardowe, czy biegłe w arytmetyce. Ptaki, o których teraz opowiem, przydadzą nam się w dalszej części rozważań.

Wyróżniającymi się osobnikami są pustułka **K** oraz szpak **S**, które udzielają odpowiedzi zgodnie z następującymi regułami:

$$\mathbf{K}xy = x \quad \text{oraz} \quad \mathbf{S}xyz = xz(yz).$$

Jako proste ćwiczenie zauważmy, że za pomocą **K** i **S** potrafimy wyrazić ptaka identycznościowego. Istotnie, rozważmy ptaka **SKK**. Słysząc nazwę jakiegokolwiek ptaka x, wyśpiewa on co następuje:

$$\mathbf{SKK}x = \mathbf{K}x(\mathbf{K}x) = x,$$

a zatem odpowiada on tak samo jak ptak identycznościowy. W dalszych rozważaniach będziemy odwiedzać tylko lasy *oszczędne*, czyli takie, w których nie występuje więcej niż jeden przedstawiciel danego gatunku. Innymi słowy, jeśli dla dwóch ptaków A i B ich odpowiedzi na nazwę dowolnego ptaka x są takie same (czyli $Ax = Bx$), to utożsamiamy A z B. W związku z tym możemy zapisać, że $\mathbf{I} = \mathbf{SKK}$.

Łącząc swe siły, szpak i pustułka potrafią znacznie więcej. Za pomocą tych dwóch ptaków można wyrazić dowolnego ptaka kombinatorycznego,

o czym możemy się przekonać, wstępując do Lasu Mistrzów z rozdziału 18 w [8].

Aby jednak nie zapisywać każdego z interesujących nas ptaków jako skomplikowanej kombinacji szpaków i pustułek, poznajmy więcej ptasich towarzyszy:

- *rudzika* **R**, dla którego $\mathbf{R}xyz = yzx$,
- *orła* **E**, dla którego $\mathbf{E}xyzwv = xy(zwv)$,
- *szczygła* **G**, dla którego $\mathbf{G}xyzw = xw(yz)$,
- *sójkę* **J**, dla której $\mathbf{J}xyzw = xy(xwz)$,
- *sowę* **O**, dla której $\mathbf{O}xy = y(xy)$.

Nim przejdziemy dalej, zauważmy, że niektóre ptaki możemy *redukować*. Na przykład zamiast mówić o ptaku $\mathbf{R}(\mathbf{KIK})\mathbf{KS}$, możemy skorzystać najpierw z własności rudzika, a następnie cechy pustułki i równoważnie mówić o szpaku. Rzeczywiście,

$$\mathbf{R}(\mathbf{KIK})\mathbf{KS} = \mathbf{KS}(\mathbf{KIK}) = \mathbf{S}.$$

Powyższy ciąg pokazuje nam pewną *redukcję*. Co ciekawe, otrzymaliśmy ostatecznie ptaka, którego nie możemy dalej redukować – otrzymany szpak nie ma w tej chwili nic do powiedzenia! Warto powiedzieć więcej: jeśli napotykamy na przykład ptaki $\mathbf{SER}$ lub $\mathbf{O}(\mathbf{GR})$, to również dla nich żadne dalsze redukcje nie są możliwe.

Zauważmy, że dla ptaka $\mathbf{R}(\mathbf{KIK})\mathbf{KS}$ mogliśmy przeprowadzić inną, również poprawną, redukcję: w pierwszym kroku, zamiast wykorzystywać własności rudzika, dozwolone jest wykonanie redukcji dla ptaka $\mathbf{KIK}$. Okazuje się, że jeśli pewnego, nawet bardzo skomplikowanego, ptaka jesteśmy w stanie doprowadzić do *postaci normalnej* (czyli za pomocą redukcji otrzymać ptaka, dla którego nie można już stosować żadnych dalszych uproszczeń), to w celu jej uzyskania wystarczy stosować *strategię redukcji lewostronnej*. Tak właśnie zrobiliśmy w naszym przypadku: zgodnie z tą strategią najpierw zredukowaliśmy rudzika, a dopiero potem skorzystaliśmy ze śpiewów pustułki.

Bardzo ważną i intrygującą rolę w każdym lesie, do którego zawitają, pełnią *ptaki mędrcy*. Ptak Y jest ptakiem mędrcem, jeżeli słysząc nazwę dowolnego ptaka x, wyśpiewa nazwę pewnego ptaka, którego x lubi. Tę ciekawą własność możemy zapisać następująco:

$$\mathsf{Y}x = x(\mathsf{Y}x).$$

Ptaki mędrcy to inaczej tak zwane kombinatory punktu stałego. Okazuje się, że różnych ptaków mędrców mamy całe mnóstwo. Jeden z nich można w prosty sposób wyprowadzić z *ptaka Turinga* **U**, spełniającego $\mathbf{U}xy = y(xxy)$, biorąc **UU**. Takiego ptaka mędrca oznaczymy przez Θ. Innym (i to jest bardzo ważna informacja, z której później skorzystamy) ptakiem mędrcem jest *ptak Curry'ego* **Y**, zdefiniowany jako $\mathbf{Y} = \mathbf{BM}(\mathbf{BWB})$, gdzie **M** to znany nam już przedrzeźniacz, natomiast **B** to *drozd*, a **W** to *gajówka*, których śpiewające zasady wyrażają się równościami:

$$\mathbf{B}xyz = x(yz) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{W}xy = yxx.$$

Okazuje się, niektóre lasy zamieszkałe są przez ptaki o niezwykłych umiejętnościach. Wśród nich możemy napotkać *ptaki logiczne*, potrafiące uprawiać logikę zdaniową (rozdział 23 w [8]), czy *ptaki biegłe w arytmetyce* (rozdział 24 tamże). Ponieważ ptaki logiczne nie będą odgrywać dla nas większej roli, wystarczy powiedzieć, iż prawdę reprezentuje pustułka **K**, natomiast fałsz ptak, którego nazwę wyśpiewa pustułka, słysząc nazwę ptaka identycznościowego – czyli **KI**.

Więcej miejsca poświęcimy ptakom z drugiej rodziny. Oczywiście aby w ogóle mówić o arytmetyce, musimy wprowadzić liczby naturalne. Pomoże nam w tym *wireonek* **V**, dla którego zachodzi $\mathbf{V}xyz = zxy$. Jedną z metod reprezentowania liczb naturalnych za pomocą ptaków jest wyrażenie zera za pomocą ptaka identycznościowego **I**, natomiast wszystkich liczb naturalnych dodatnich korzystając z *ptaka następnika* **N**. Według jakich zasad śpiewa **N**, aby ptaki odpowiadające dwóm różnym liczbom były od siebie różne? Otóż możemy zdefiniować **N** jako ptaka, dla którego zachodzi $\mathbf{N}xy = y(\mathbf{KI})x$. Okazuje się, że wśród ptaków biegłych w rachunkach znajduje się również taki, który odpowiada za odejmowanie jedynki. Jest to *ptak poprzednika* **P**, którego określa następująca zasada: $\mathbf{P}x = x(\mathbf{KI})$. Ostatni ptak, którego poznamy, to *wykrywacz* **Z**. Słysząc nazwę ptaka identycznościowego, odpowie „prawda" (czyli wyśpiewa nazwę pustułki **K**), natomiast w odpowiedzi na nazwę ptaka reprezentującego liczbę dodatnią, odpowie „fałsz" (czyli **KI**). Nie interesuje nas, jaką nazwę wyśpiewa w odpowiedzi na nazwę ptaka nieodpowiadającego żadnej liczbie, ważne jest, że taki ptak istnieje. Regułę rządzącą jego trelami określa równość $\mathbf{Z}x = x\mathbf{K}$.

Poznawszy tak wiele gatunków, możemy wreszcie przejść do najistotniejszych fragmentów tej opowieści.

3 Problem otwarto-domknięty, czyli czy istnieją ptaki podwójnie mądre?

Wielu informacji o ptakach mędrcach i sowach dostarcza nam rozdział trzynasty z [8]: „Galeria ptaków mędrców". Dzięki zawartym w nim zagadkom dowiadujemy się intrygujących faktów o ptakach żyjących w oszczędnych lasach. Poniższe stwierdzenia o zależnościach między sowami a ptakami mędrcami wynikają z następujących zagadek.

Zagadka 19. *Ptak mędrzec, usłyszawszy nazwę sowy, odpowie, nazywając ptaka mędrca.*

Zagadka 20. *Sowa lubi tylko ptaki mędrców.*

Zagadka 23. *Sowa lubi wszystkie ptaki mędrców.*

Zapiszmy powyższe informacje w sposób bardziej formalny.

($\star$) Jeśli Y jest kombinatorem punktu stałego, to jest nim również YO.
($\star\star$) Kombinator Y jest kombinatorem punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathsf{O}\mathsf{Y} = \mathsf{Y}$.

Zauważmy, że ($\star$) nie gwarantuje nam, że ptaki Y i YO są sobie równe. Co więcej, można pokazać, że istnieje taki ptak mędrzec, dla którego równość $\mathsf{Y} = \mathsf{YO}$ nie zachodzi. Istotnie, jeśli wyśpiewamy nazwę sowy do ptaka Curry'ego Y, to odpowie on nazwą ptaka mędrca Θ (na podstawie [6]). Otrzymamy zatem równość $\mathsf{YO} = \Theta$, a jak już zostało wspomniane w rozdziale 2, ptaki mędrcy Curry'ego Y i Turinga Θ nie są sobie równe.

Tym samym dochodzimy do problemu postawionego przez Statmana.

Zagadka otwarta. *Czy istnieje taki ptak mędrzec, który usłyszawszy nazwę sowy wyśpiewa swoją nazwę? Innymi słowy, czy istnieje taki kombinator punktu stałego Y, dla którego zachodzi równość $\mathsf{Y} = \mathsf{YO}$?*

Zauważmy, że jeśli taki ptak mędrzec istnieje, wówczas zachodziłyby następujące równości:

$$\mathbf{O}Y = Y = Y\mathbf{O}.$$

Czy należałoby takiego ptaka nazwać *podwójnie mądrym*? Jak na razie kombinator o tej własności, o ile oczywiście istnieje, doczekał się tylko oficjalnej nazwy: jest to *podwójny kombinator punktu stałego*.

Z powodów historycznych pozwoliłam sobie w tytule tego rozdziału nazwać omawiany problem otwarto-domkniętym. Otóż negatywną odpowiedź, zgodnie z przypuszczeniami Statmana, podał w 1997 roku Benedetto Intrigila ([3]). Jednak kilka lat później Jörg Endrullis znalazł nienaprawialny błąd w dowodzie Intrigili i tym samym powyższa zagadka ponownie zyskała status otwartej. Jak dotąd podjętych zostało kilka ponownych prób ataku tego frapującego problemu, opublikowanych między innymi w [2, 4, 6], ale cóż z tego: hipoteza Statmana nadal czeka na potwierdzenie.

4 Czy normalizacja Jerzego Pogonowskiego jest możliwa?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy odwiedzić pewien las, zwany Lasem Urodzinowym. W lesie tym mieszkają znani nam już ptasi bohaterowie: orzeł **E**, szczygieł **G**, ptak identycznościowy **I**, sójka **J**, pustułka **K**, ptak następnika **N**, sowa **O**, ptak poprzednika **P**, rudzik **R**, szpak **S**, gajówska **W**, ptak Curry'ego **Y** oraz wykrywacz **Z**.

Choć problem normalizacji jest nierozstrzygalny (co oznacza, że nie istnieje ogólna metoda pozwalająca orzekać, czy dla zadanego ptaka istnieje postać normalna), to o wielu kombinatorach potrafimy bez większego trudu stwierdzić, iż nie posiadają one własności normalizacji. Przenosząc Jerzego Pogonowskiego do Lasu Urodzinowego, otrzymujemy następujący wynik.

Główne twierdzenie. *Jerzy Pogonowski nie występuje w postaci normalnej.*

Dowód. Zauważmy, że w przypadku rozważanego kombinatora wystarczy zastosować znane nam już z rozdziału 2 reguły redukcji, w wyniku których otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{JERZYPOGONOWSKI} &= \mathbf{ER}(\mathbf{EYZ})\mathbf{POGONOWSKI} \\
&= \mathbf{R}(\mathbf{EYZ})(\mathbf{POG})\mathbf{ONOWSKI} \\
&= \mathbf{POGO}(\mathbf{EYZ})\mathbf{NOWSKI} \\
&= \mathbf{O}(\mathbf{KI})\mathbf{GO}(\mathbf{EYZ})\mathbf{NOWSKI} \\
&= \mathbf{G}(\mathbf{KIG})\mathbf{O}(\mathbf{EYZ})\mathbf{NOWSKI} \\
&= \mathbf{IN}(\mathbf{O}(\mathbf{EYZ}))\mathbf{OWSKI} \\
&= \mathbf{N}(\mathbf{O}(\mathbf{EYZ}))\mathbf{OWSKI} \\
&= \mathbf{O}(\mathbf{KI})(\mathbf{O}(\mathbf{EYZ}))\mathbf{WSKI} \\
&= \mathbf{O}(\mathbf{EYZ})(\mathbf{KI}(\mathbf{O}(\mathbf{EYZ})))\mathbf{WSKI} \\
&= \mathbf{O}(\mathbf{EYZ})\mathbf{IWSKI} \\
&= \mathbf{I}(\mathbf{EYZI})\mathbf{WSKI} \\
&= \mathbf{EYZIWSKI} \\
&= \mathbf{YZ}(\mathbf{IWS})\mathbf{KI} \\
&= \mathbf{Z}(\mathbf{YZ})(\mathbf{WS})\mathbf{KI} \\
&= \mathbf{YZK}(\mathbf{WS})\mathbf{KI} \\
&= \dots \\
&= \mathbf{YZ}\underbrace{\mathbf{K}\dots\mathbf{K}}_{\text{ile chcemy}}(\mathbf{WS})\mathbf{KI}.
\end{aligned}
$$

Ptak mędrzec, który ulokował się na początku powyższego termu, skutecznie uniemożliwia normalizację. Każdy normalizowalny kombinator daje się sprowadzić do postaci normalnej przez strategię redukcji lewostronnej, pokazaliśmy zatem, że dla badanego termu otrzymanie postaci normalnej nie jest możliwe. □

Powyższe twierdzenie nie powinno być dla nikogo zaskakujące. Istotnie, Jerzy Pogonowski jest postacią niezwykłą, co w oczywisty sposób stoi w sprzeczności z powszechnym rozumieniem słowa „normalny”. O ponadprzeciętności bohatera powyższego wyniku można oczywiście orzec bez wprowadzania aparatu matematycznego, niemniej nie zaszkodzi przekonać się o tym, przeprowadzając formalny dowód.

Literatura

1. V. Dierschke. *Jaki to ptak?* Świat Książki, 2009.
2. J. Endrullis, D. Hendriks, J.W. Klop, and A. Polonsky. Discriminating lambda-terms using clocked Böhm trees. *Logical Methods in Computer Science*, 10:1–29, 2014.
3. B. Intrigila. Non-existent Statman's double fixed point combinator does not exist, indeed. *Information and Computation*, 137(1):35–40, 1997.
4. G. Manzonetto, A. Polonsky, A. Saurin, and J.G. Simonsen. The fixed point property and a technique to harness double fixed point combinators. *Journal of Language and Computation*, 29(5):831–880, 2019.
5. J. Pogonowski. Ptak Gödla. Referat podczas *Applications of Algebra in Logic and Computer Science XI*, Zakopane, marzec 2007. `http://logic.amu.edu.pl/images/9/91/Drzakop2007.pdf` [dostęp: 2021-09-10].
6. A. Polonsky. Fixed point combinators as fixed points of higher-order fixed point generators. *Logical Methods in Computer Science*, 16:7:1–7:17, 2020.
7. R. Smullyan. *To mock a mockingbird. And other logic puzzles including an amazing adventure in combinatory logic*. Oxford University Press, 1985.
8. R. Smullyan. *Przedrzeźniać przedrzeźniacza oraz inne zagadki logiczne łącznie z zadziwiającą przygodą w krainie logiki kombinatorycznej*. Książka i Wiedza, 2007.
9. R. Statman. Some examples of non-existent combinators. *Theoretical Computer Science*, 121(1&2):441–448, 1993.

Fantazje matematyczno-dydaktyczne lingwisty

Robert Sochacki

Na wstępie chciałbym bardzo podziękować Pani prof. Dorocie Leszczyńskiej-Jasion za zaproszenie do napisania niniejszego tekstu z okazji okrągłej rocznicy urodzin prof. dr hab. Jerzego Pogonowskiego. Z jednej strony traktuję to zaproszenie jako wielkie wyróżnienie, a z drugiej mam pewne obawy, ponieważ pisanie czegokolwiek dla prof. Pogonowskiego i o prof. Pogonowskim jest wielkim wyzwaniem. Ci, którzy Go znają, wiedzą, że bardzo ciężko jest zaspokoić Jego poczucie perfekcjonizmu w niemal każdym aspekcie. Mam nadzieję, że niniejszy tekst nie obnaży całkowicie moich skromnych mocy intelektualnych i nie stanie się w przyszłości przyczynkiem do ironizowania na mój temat przez Dostojnego Jubilata.

Niniejszy tekst pragnę podzielić na dwie części. Pierwsza będzie miała charakter wspomnieniowy, a druga będzie miała charakter naukowo-dydaktyczny, co powinno przypaść do gustu Jubilatowi z racji Jego ostatnich zainteresowań.

Zakopane, Jesienna, stawek, kaczory i lokomotywa

Muszę całkiem obiektywnie przyznać, że miałem wielkie szczęście poznać Pogona (mam nadzieję, że Jubilat wybaczy mi taką poufałość). O ile mnie

Robert Sochacki e-mail: rsochacki@uni.opole.pl
Uniwersytet Opolski

pamięć nie zawodzi, to pierwszy raz spotkałem prof. Pogonowskiego na jednej z początkowych konferencji *Applications of Algebra in Logic and Computer Science* w Zakopanem, która była zorganizowana przez zespół pod kierownictwem prof. Joanny Grygiel z Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie. Było to prawdopodobnie w roku 1998 albo 1999 (więcej informacji na temat tej konferencji można znaleźć w artykule autorstwa J. Grygiel: „Applications of Algebra in Logic and Computer Science – the Past and the Future", *Bulletin of the Section of Logic*, Vol. 47/1 (2018), pp. 59–67). Wygłosiłem wówczas referat związany z moją pracą doktorską, która dotyczyła tzw. geometrii kwadratów. Pamiętam, że po referacie podszedł do mnie prof. Pogonowski i chyba nawet mnie pochwalił za wystąpienie. Nie miałem oczywiście świadomości, kim był człowiek, który zamienił ze mną kilka słów, ale później zostałem poinformowany przez moich kolegów i koleżanki, kim był mój rozmówca. Od tego momentu nasze spotkania na tej konferencji były nader częste, a nasza znajomość „konferencyjna" zaczęła powoli wkraczać także na grunt o charakterze niekoniecznie ściśle naukowym. Właśnie te nieformalne spotkania cenię sobie najbardziej.

Nasz Dostojny Jubilat jest człowiekiem o wielu talentach, niektórzy twierdzą nawet, że jest człowiekiem, który wie wszystko. Pamiętam, że na którejś z wcześniej wspomnianych konferencji w Zakopanem rozmawiałem z prof. Andrzejem Pietruszczakiem z UMK w Toruniu. Miał on problem ze znalezieniem drugiego recenzenta w przewodzie doktorskim dotyczącym pracy o charakterze interdyscyplinarnym. Po chwili rozmowy ze mną zamyślił się i powiedział: „Nad czym ja się zastanawiam, wezmę przecież Pogonowskiego – On wie wszystko". Taka opinia o Pogonie nie jest oczywiście dziełem przypadku. Niech za poparciem takiej tezy świadczy np. wykaz przewodów doktorskich, habilitacyjnych oraz spraw dotyczących nadania tytułu profesora, w których prof. Pogonowski był recenzentem (promotorem), a także spis Jego publikacji i wystąpień, do których nawiążę nieco później. Listy takie robią duże wrażenie i można je zobaczyć np. na stronach: Listofreviews.pdf[1] oraz Listadoktorantow2015.pdf[2]. Oprócz liczby takich doktorantów oraz napisanych recenzji warto też zwrócić

[1] `http://logic.amu.edu.pl/images/7/75/Listofreviews.pdf` (dostęp 13 czerwca 2021).

[2] `http://logic.amu.edu.pl/images/a/ab/Listadoktorantow2015.pdf` (dostęp 13 czerwca 2021). (*Od Redakcji: Listę recenzji oraz wypromowanych doktoratów publikujemy w tym tomie na stronach, odpowiednio, 270–276 oraz 277.*)

uwagę na obszary wiedzy, które one objęły. Można tu wymienić chociażby **językoznawstwo**, **filozofię**, **nauki o poznaniu i komunikacji społecznej** a także **informatykę**. Większość znawców dorobku naukowo-dydaktycznego Jubilata wie, że Jego zainteresowania w ostatnim czasie bardzo ewoluowały, głównie w kierunku **dydaktyki matematyki**. W swoich artykułach z tego zakresu nawiązywał do takich zagadnień jak np.: *intuicja matematyczna*, *intuicja w dydaktyce matematyki*, *twórcza rola patologii w matematyce*, *kontekst przekazu w matematyce* oraz *zasada permanencji form*. Uwagi dotyczące dydaktyki zawsze odnosił do swojej posługi dydaktycznej w szkole wyższej. Odnoszę jednak wrażenie (być może jednak tutaj błądzę), że z części Jego publikacji i rozmów ze mną wyłaniała się tęsknota za możliwością przetestowania własnych hipotez dydaktycznych na gruncie szkolnym, wśród młodzieży licealnej czy też tej na niższych szczeblach edukacji. Z jednej strony mogę tylko ubolewać nad tym, że nasz Dostojny Jubilat nie miał takiej (lub nie chciał mieć) możliwości. Znając Jego dorobek dydaktyczny głównie w kontekście nauczania logiki, przypuszczam, że bylibyśmy świadkami ciekawych eksperymentów dydaktycznych na lekcjach matematyki. Zabawne i umieszczone w kontekście praktycznym przykłady ilustrujące zastosowanie logiki do badania poprawności wnioskowania czy też do badania niesprzeczności zbioru formuł mogłyby w jakiejś zmodyfikowanej postaci służyć do weryfikacji jego poglądów w zakresie skuteczności nauczania matematyki. Z drugiej strony nasz Jubilat ucząc matematyki dzieci w szkole podstawowej lub ponadpodstawowej miałby bardzo utrudnione zadanie w tym zakresie z kilku powodów. Teraz uczniowie i ich rodzice różnią się w sposób istotny od swoich rówieśników z czasów młodości naszego Jubilata, ale też i z lat późniejszych. Obecnie młodzież szkolna prezentuje postawę roszczeniową i zawsze znajdzie się jakiś uczeń lub jego rodzic, który bardzo skutecznie zniechęci nauczyciela do wdrażania nowych pomysłów dydaktycznych. Nauczyciel w takiej nierównej konfrontacji (uczniowie są chronieni przez wiele osób i instytucji) jest skazany w najlepszym przypadku na jakiś rozstrój nerwowy. Bardzo częste zmiany podstawy programowej z matematyki nie służą ani nauczycielom, ani też uczniom, szczególnie w kontekście wymagań egzaminacyjnych na koniec danego etapu edukacyjnego. Przypuszczam, że po tych uwagach nasz Dostojny Jubilat będzie raczej zadowolony, iż postanowił żyć w luksusie posługi dydaktycznej wśród studentów.

Pozwolę sobie teraz wrócić do wątku, o którym wspomniałem wcześniej. Dotyczy on moich pozakonferencyjnych kontaktów z Pogonem. Od pamiętnego referatu w Zakopanem i poznania mojego rozmówcy postanowiłem bliżej zgłębić obszar Jego naukowych dokonań. Obecnie na stronie Pub2020jp.pdf[3] można zapoznać się z listą osiągnięć naukowych Jubilata, jest tam wyszczególnionych 176 pozycji. W początkowym okresie, mniej więcej do 1989 roku, zdecydowana większość publikacji dotyczyła zagadnień z zakresu językoznawstwa (lingwistyki). Po tym czasie zainteresowania naukowe prof. Pogonowskiego zaczęły powoli zmierzać ku podstawom teorii mnogości, podstawom matematyki, a następnie w kierunku dydaktyki matematyki. Jego odczyty i publikacje w tym zakresie dotyczyły między innymi takich kwestii jak: *aksjomatyczna teoria mnogości Zermelo*, *paradoks Skolema*, *aksjomaty ekstremalne*, *geneza matematyki wedle kognitywistów* oraz umiejscowienie tych zagadnień w różnych kontekstach. Poza tym Dostojny Jubilat jest Autorem bezcennych (moim zdaniem) opracowań dydaktycznych z zakresu logiki, z których to, w zmodyfikowanej postaci, korzystam na swoich zajęciach z logiki wśród humanistów. Z tego, co mi wiadomo, to nie tylko ja jestem pod urokiem dydaktycznym tych opracowań. Mają one bardzo często formę prezentacji multimedialnych[4] czy też maszynopisów, które to miałem sposobność zobaczyć kiedyś w mieszkaniu Pogona przy ulicy Jesiennej w Poznaniu. Moje wizyty tam nie były zbyt częste, ale zawsze byłem pod ich wrażeniem i to z kilku powodów. Po pierwsze, nigdy więcej i u nikogo prywatnie nie widziałem tak ogromnego i tak uporządkowanego zbioru literatury naukowej. Po drugie, tym wizytom zawsze towarzyszyło zwiedzanie Poznania, za każdym razem miałem okazję poznać kolejne bardzo ciekawe „zakamarki" tego uroczego miasta. Po trzecie, przy każdej takiej wizycie mogłem liczyć na moje ulubione „ciastko". No i po czwarte, nasze spotkania były wspaniałą okazją do wymiany uwag i przemyśleń na temat nauczania logiki. Takie są moje wrażenia z wizyt na Jesiennej. Mam tylko skromną nadzieję, że także prof. Pogonowski darzy te spotkania jakimś sentymentem. Pamiętam nawet, że kiedyś nawiązał do moich wizyt w Poznaniu. Powiedział wtedy,

[3] `https://logic.amu.edu.pl/images/2/2e/Pub2020jp.pdf` (dostęp 27 czerwca 2021). *(Od Redakcji: Listę publikacji Profesora Pogonowskiego zawarliśmy w tym tomie na stronach 251–269.)*

[4] Zob. „Jerzy Pogonowski – Teksty on line – Zakład Logiki Stosowanej" (`https://logic.amu.edu.pl/index.php/Jerzy_Pogonowski_-_Teksty_on_line`, dostęp 28 czerwca 2021).

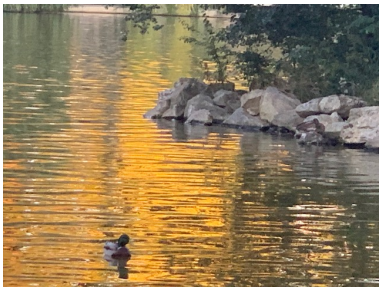
że jestem jedyną osobą spośród Jego znajomych, która przy drzwiach wejściowych do Jego mieszkania zawsze witała Go jakimś wulgaryzmem. Szczerze mówiąc, nie pamiętam takich powitań z mojej strony, ale nie widzę też powodu, dla którego Pogon w tym przypadku miałby mijać się z prawdą. Zapewne powodem użycia tych wulgaryzmów nie było pojawienie się w drzwiach osoby właściciela mieszkania, ale przypuszczam, że powód tych rzekomych niecenzuralnych słów leżał gdzie indziej. Otóż Dostojny Jubilat mieszkał na ostatnim piętrze w budynku, który nie posiadał windy. Pokonanie takiego dystansu było dla mnie dość sporym wysiłkiem i widocznie z tego względu w taki właśnie sposób manifestowałem swoje niezadowolenie.

Wyżej wspomnianym wizytom towarzyszyły oczywiście rewizyty złożone w Opolu. Miały one jednak głównie charakter bardziej oficjalny i wielowymiarowy, jak przystało na osobę Jubilata. Wizyty oficjalne związane były z Uniwersytetem Opolskim, w którym to prof. Pogonowski upodobał sobie szczególnie Instytut Matematyki i Informatyki oraz Instytut Filozofii. W tym pierwszym współpracował naukowo z prof. Januszem Czelakowskim, a z drugim instytutem wiąże się ciekawa historia. Wiadomo, że prof. Pogonowski uzyskał swoje stopnie naukowe w dyscyplinie językoznawstwo, ale naukowo udzielał się także w filozofii i podstawach matematyki. Pamiętam, że te pozajęzykoznawcze zainteresowania nasz Jubilat chciał w jakiś sposób naukowo usankcjonować. Najlepszym rozwiązaniem, w Jego opinii, miał być doktorat z filozofii. Ponieważ prof. Pogonowski nie rzuca słów na wiatr, więc postanowił rozpocząć studia doktoranckie w tym zakresie. Wybór padł na Instytut Filozofii Uniwersytetu Opolskiego i było to chyba w roku 2009. Pamiętam z opowiadań innych osób, w tym. prof. Adama Groblera, że Dostojny Jubilat czekał w kolejce z innymi kandydatami na takie studia, żeby wykazać się swoją wiedzą filozoficzną w rozmowie kwalifikacyjnej przed komisją. Przy okazji miał rekomendacje bardzo poważnych profesorów. Komisja była bardzo zakłopotana, widząc kandydata takiego formatu i postanowiła nie zadawać żadnych pytań. Ponadto stwierdziła istnienie bardzo dużego prawdopodobieństwa, że pracownicy naukowi prowadzący zajęcia na tych studiach doktoranckich dowiedzą się więcej od kandydata niż On od nich. To oczywiście nie do końca przekonało prof. Pogonowskiego, aby zrezygnować ze swoich planów. Miał świadomość tego, że jeśli się uprze, to komisja będzie musiała go przyjąć, bo spełnia wszystkie kryteria z naddatkiem. Ostatecz-

nie jednak argument komisji, że jeśli zostanie przyjęty, to wtedy będą musieli odmówić komuś z młodych ludzi, bardziej potrzebujących nauk ze strony Instytutu Filozofii, był bardziej skuteczny. Podobno wtedy zwiesił smutno głowę i zrezygnował. Ostatecznie zaproponowano niedoszłemu studentowi prowadzenie zajęć na tych studiach z metalogiki. Takie zajęcia były prowadzone w roku akademickim 2009/2010. W tym samym czasie działała prężnie utworzona przy Uniwersytecie Opolskim Grupa Logiki, Języka i Informacji. Jej głównym celem było m.in. zapraszanie wybitnych uczonych polskich i zagranicznych z odczytami do Opola. Profesor Pogonowski był jednym z takich zaproszonych prelegentów i był uprzejmy przyjąć zaproszenie aż dwukrotnie: w roku 2010 wygłosił odczyt *Niewyrażalna tęsknota za modelem zamierzonym*, a w roku 2013 (przy pełnej sali audytoryjnej) *Wesołe zagadki*. Ten drugi wykład został niejako „zamówiony" przeze mnie na potrzeby edukacyjne głównie młodzieży licealnej z Opola. Znając dorobek dydaktyczny Jubilata z zakresu logiki i Jego poczucie humoru w tym zakresie, miałem nadzieję na niezapomnianą przygodę intelektualną z uczniami szkół średnich. Nie zawiodłem się, wszyscy bawili się świetnie i wykład ten został na długo zapamiętany przez licealistów. W tym miejscu chciałbym jeszcze dodać, że powstanie Grupy Logiki, Języka i Informacji przyczyniło się do organizacji w roku 2012 Europejskiej Letniej Szkoły Logiki, Języka i Informacji (ESSLLI). Szkoła taka odbyła się po raz pierwszy w Polsce, wzięło w niej udział ponad 360 uczestników i 90 wykładowców z całego świata, w tym prof. Pogonowski. W okresie od 2009 do 2012 roku Jubilat dość regularnie odwiedzał Opole. Uczestniczył również w cotygodniowych seminariach organizowanych przez prof. Czelakowskiego w Instytucie Matematyki i Informatyki.

Oprócz tych oficjalnych wizyt związanych z Uniwersytetem Opolskim były też wizyty o innym charakterze. Opole leży na trasie Polskich Kolei Państwowych łączącej Poznań z Krakowem, w którym corocznie odbywają się Konferencje Historii Logiki oraz, od pewnego czasu, konferencje o nazwie „Transgresje Matematyczne". Pogon jest stałym uczestnikiem tych wydarzeń naukowych. Pokonanie takiej trasy pociągiem IC wymaga około 6 godzin (w najlepszym połączeniu to 5 godzin i 20 minut – informacja ze strony www.pkp.pl), a dla Jubilata, którego wielką słabością są m.in. papierosy, taki okres bez „dymka" jest nieakceptowalny, by nie powiedzieć nieludzki (dla podróżujących inaczej przypomnę, że od pewnego czasu w pociągach wszelkiego rodzaju jest całkowity zakaz palenia). Ten

nikotynowy nałóg spowodował przymusowy, niezbyt długi, relaksacyjny pobyt w Opolu. Jest to wspaniałe rozwiązanie dla Jubilata z kilku powodów. Po pierwsze, Opole jest mniej więcej w połowie tej trasy – 3 godziny maksymalnie są jeszcze do wytrzymania bez papierosa. Po drugie, można wtedy uzupełnić brak dymu w płucach. Po trzecie, można odwiedzić jedno szczególne miejsce w Opolu, do którego Pogon ma niewyobrażalny sentyment. Jest to miejsce niedaleko dworca PKP, do którego można dotrzeć pieszo w około 10–15 minut. Znajduje się tam urokliwy stawek, na którym jest fontanna. Niedaleko znajduje się amfiteatr, a w nim Narodowe Centrum Polskiej Piosenki oraz Muzeum Polskiej Piosenki. W okresie letnim można przy tym stawku posłuchać muzyki, która nadawana jest przez zamontowane tam na stałe głośniki. Jednak dla Pogona nie to jest główną atrakcją tego miejsca, tylko pływające po stawku „kaczory", jak to zwykł mawiać Jubilat. Na widok tych ptaków uwidacznia się druga wielka słabość Jubilata – jest to aparat fotograficzny, przy pomocy którego dokumentowane są takie właśnie wizyty. Po sesji zdjęciowej kaczorów następnym etapem krótkiego postoju w Opolu jest wizyta na herbatce (plus ewentualnie jakieś ciastko) w nieodległej restauracji o nazwie „Radiowa". Tam odbywa się dalszy ciąg sesji zdjęciowej, ale już bez pływających ptaków. Zdarza się czasami, że moja skromna osoba uwieczniana jest wtedy na takich fotkach na tle jakichś ciekawych kompozycji roślinnych będących w ogródku Radiowej. Po krótkim i relaksacyjnym pobycie w tej sympatycznej restauracji towarzyszę naszemu Jubilatowi w drodze powrotnej na stację PKP Opole Główne. Tam nastąpi ciąg dalszy podróży do Krakowa. Zanim jednak dotrzemy do tego miejsca, to oczywiście aparat fotograficzny nie ma możliwości odpocząć. Tym razem fotografowane są różne i ciekawe (w opinii prof. Pogonowskiego) zjawiska i wydarzenia mające miejsce na trasie od Radiowej do dworca. Na stacji Opole Główne znajduje się ostatni element, któremu poświęcę kilka końcowych zdań. Przy wejściu na teren dworca, po prawej stronie, władze PKP Opole Główne postanowiły umieścić wielki wspaniały parowóz jako zabytek, który to nasz Jubilat nazywa lokomotywą. To właśnie tutaj kończy się sesja zdjęciowa. Ostatnie zdjęcia zawierają zawsze lokomotywę (z różnych ujęć) i dodatkowo Jubilata na jej tle. Czasami także ja jestem przymuszany do pozowania na tle tego zabytku. I tak właśnie kończą się te coroczne mniej oficjalne wizyty Dostojnego Jubilata w Opolu.



Kaczory

Lokomotywa

Wspomniałem już wcześniej, że właśnie te ostatnie spotkania (nazwałem je nieformalnymi) są dla mnie najbardziej wartościowe. Stanowią doskonałą okazję do rozmów na różne tematy, niekoniecznie tylko stricte naukowe. Wiele poruszanych wątków dotyczyło dydaktyki matematyki w szkole ponadpodstawowej, ponieważ piszący te słowa od wielu lat był nauczycielem matematyki w opolskich liceach. Było to m.in. wtedy, kiedy prof. Pogonowski pisał artykuły o zasadzie permanencji form oraz o intuicji matematycznej, ale nie tylko. Rozmawialiśmy często o posłudze dydaktycznej z logiki wśród studentów humanistów, dla których przyswojenie takiej wiedzy i odpowiednich umiejętności było wielkim wyzwaniem. Zresztą dla nas, jako wykładowców, też była to niełatwa praca dydaktyczna. Znakomita większość moich studentów na Wydziale Prawa i Administracji Uniwersytetu Opolskiego (także na innych kierunkach) kojarzy tę dziedzinę wiedzy z matematyką. Staram się jak mogę, aby te skojarzenia jak najbardziej oddalić. I tutaj wielce pomocny okazał się prof. Pogonowski. Niezastąpione w tej materii okazały się Jego opracowania dydaktyczne w formie prezentacji multimedialnych i tekstów omawiające pewne zagadnienia z logiki. Z tego, co mi wiadomo, nie tylko moja skromna osoba korzysta z tych opracowań. To, co wyróżnia w sposób istotny wiele materiałów poświęconych logice i opracowanych przez Dostojnego Jubilata, to:

1. różnorodność tematyczna;
2. nieskrępowana dostępność w sieci;
3. mnogość przykładów ilustrujących omawiane zagadnienia;
4. umieszczenie wielu zagadnień w kontekstach praktycznych (sic!);

5. niezwykła pedanteria w opracowaniu wszystkich znanych mi materiałów;
6. promocja logiki przy pomocy bardzo pomysłowych, niesztampowych, określeń;
7. nietuzinkowe poczucie humoru towarzyszące niektórym opracowaniom.

Być może coś mi jeszcze umknęło, jeśli tak, było to niezamierzone. Można to wszystko zweryfikować, analizując np. zawartość trzeciego z podanych wyżej linków. Stosowanie takich chwytliwych określeń w kontekście logiki jak: *Logika radosna*, *Wesołe zagadki*, *Marzenia o monogamii*, *Heksagonalne ogrody logiki* czy też *Agnostyczny jeż w lesie semantycznym* zainteresuje niejednego studenta (humanistę), a o to w dzisiejszych trudnych czasach chodzi. Niejeden zada sobie np. takie pytanie: Cóż w logice może być radosnego? albo: Co ma wspólnego logika z monogamią? albo jeszcze inne pytanie, które skłoni studenta do spojrzenia na zawartość takiego opracowania. To, co jest bardzo istotne, ale być może niedopowiedziane wprost, to fakt, że propozycja Jubilata nauczania logiki skierowana do tzw. humanistów (i nie tylko) jest bardzo ATRAKCYJNA. Nie tylko przez wyjście z logiką do sieci, ale przede wszystkim poprzez chęć pokazania jej użyteczności. Muszę przyznać, że te opracowania prof. Pogonowskiego zrobiły na mnie bardzo duże wrażenie i odkąd dane mi jest nauczać logiki na kierunkach humanistycznych, to czerpię z tych opracowań pełną garścią. Oczywiście wprowadzam trochę modyfikacji, nie jestem takim pedantem terminologicznym i raczej (na ile to możliwe) pomijam zbytnie formalizmy, ale **duch Pogona pozostaje!** Odnoszę wrażenie, że taka forma przekazu zagadnień z logiki cieszy się uznaniem studentów humanistów i nie kojarzy się już tak często z matematyką szkolną. Wiadomo, że studenci kierunków niematematycznych w przeważającej części mają jakiś uraz do tego przedmiotu. Nasz Dostojny Jubilat w ostatnich swoich publikacjach często nawiązuje do tego wątku. Twierdzi, że w szkołach na lekcjach matematyki stosuje się *przemoc symboliczną* lub też, że uprzedzenia wobec matematyki są skutkiem *traumatycznych doświadczeń szkolnych*. Nie będziemy tutaj omawiać szczegółowo tych kwestii, prawda jest jednak taka, że matematyka już na początku nauczania wydaje się przedmiotem trudnym i panuje powszechne przeświadczenie, że na co dzień można sobie bez niej doskonale radzić. Przyczyn takiego stanu rzeczy jest wiele, można o tym sobie przeczytać np. w książce *Myślenie mate-*

matyczne. Podstawy, rozwój, edukacja. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2020 pod redakcją Jana Gałuszki. Nasz Dostojny Jubilat dostrzegł potrzebę ocieplenia wizerunku matematyki szkolnej. Tej kwestii poświęcił wiele uwagi w kontekście intuicji matematycznej a także wprowadzonego przez Niego pojęcia kontekstu przekazu w dydaktyce matematyce. Zainteresowanych odsyłamy do wielu publikacji poświęconym tym zagadnieniom. W następnej części artykułu podamy pewną propozycję, pewien program, kształcenia wśród młodzieży szkolnej takich umiejętności jak samodzielne, logiczne i krytyczne myślenie, które są niezbędne w procesie uczenia się matematyki. Nabycie takich kompetencji przez uczniów pozwoli im przejść przez etap nauczania matematyki w sposób bardziej bezstresowy, ku uciesze naszego zatroskanego Jubilata.

Weź to na rozum

W rozmowach o edukacji szkolnej często pada stwierdzenie, że współczesna szkoła powinna większy nacisk kłaść na naukę samodzielnego myślenia niż przekazywanie szczegółowych informacji. Jest to z każdym rokiem prawda bardziej aktualna, gdyż nasza cywilizacja podlega tak szybkim zmianom, że nauka szczegółowej wiedzy i związanych z nią umiejętności, atrakcyjnych i poszukiwanych w świecie, w którym uczeń rozpoczyna edukację, może być anachronizmem już w momencie jej zakończenia. W nowoczesnej edukacji ważniejsze od przekazywania specjalistycznej wiedzy jest rozbudzanie ciekawości poznawczej, rozwijanie ogólnych kompetencji intelektualnych i społecznych oraz wspieranie postawy ukierunkowanej na rozwój i samopoznanie. Rodzi się zatem pytanie, jak oprócz niezbędnej dawki nauczania ukierunkowanego na kompetencje związane z określonym typem wiedzy (historycznej, matematycznej, przyrodniczej) współczesna szkoła może wspierać rozwój dyspozycji intelektualnych przydatnych na wszystkich etapach rozwoju technologicznego i we wszystkich dziedzinach nauki i życia. Kilku pracowników Instytutu Filozofii Uniwersytetu Opolskiego podjęło się opracowania książki, na bazie której można byłoby kształcić właśnie takie dyspozycje intelektualne. Książka taka o tytule *Weź to na rozum*, której autorami są Adam Grobler, Piotr Leśniak oraz Robert Sochacki, powstała na bazie doświadczeń związanych z realizacją dwóch projektów dydaktycznych Narodowego Centrum Badań

i Rozwoju. Oba projekty pod nazwami „Logiczny uczeń gimnazjum jako III misja Uniwersytetu Opolskiego" oraz „Logiczny uczeń szkoły ponadgimnazjalnej jako III misja Uniwersytetu Opolskiego" zrealizowano w latach 2017–2019. Obejmowały one swoim zasięgiem około 500 uczniów szkół gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych w 11 szkołach z terenu Opola, Dobrzenia Wielkiego oraz Rydułtów.

Udział pracowników Instytutu Filozofii Uniwersytetu Opolskiego w realizacji obu tych przedsięwzięć wynikał z kilku istotnych przesłanek. Pierwszą z nich było ogłoszenie w roku 2016 konkursu na projekty Edukacji Filozoficznej w gimnazjach i szkołach ponadgimnazjalnych przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju. Takie zapotrzebowanie wynikało m.in. ze stwierdzenia wśród młodzieży szkolnej bardzo istotnych braków w zakresie kompetencji związanych z poprawnym argumentowaniem, krytycznym, samodzielnym myśleniem, logiką i heurystyką. Potwierdzeniem takiego stanu rzeczy jest m.in. zawartość raportu Instytutu Badań Edukacyjnych [1], w którym Autorzy prezentują wyniki badań w zakresie efektów nauczania filozofii (edukacji filozoficznej) na III i IV etapie edukacyjnym. Wiadomo, że tylko w niewielkiej części szkół nauczanie filozofii jest faktem, a zatem dobrym materiałem do rozważań była analiza wszystkich odpowiedzi na jedno z postawionych tam pytań: czym się te szkoły charakteryzują oraz w jaki sposób i dlaczego prowadzą nauczanie filozofii (edukacji filozoficznej). Przytoczymy tutaj tylko niektóre z wielu cennych spostrzeżeń nauczycieli prowadzących zajęcia z edukacji filozoficznej. Wśród niewątpliwych korzyści z prowadzenia tego typu zajęć można zaliczyć wyrobienie u uczniów takich kompetencji, jak:

– samodzielność myślenia, lepsze rozumienie świata, ludzi i samego siebie;
– twórcze i krytyczne myślenie oraz wrażliwość moralna;
– jasne prezentowanie własnych stanowisk w dyskusji poparte rzetelną argumentacją i przykładami;
– rozpoznawanie i rozumienie problemów.

Powyżej zostały wymienione tylko cztery, najbardziej cenione, umiejętności podawane przez nauczycieli prowadzących zajęcia z edukacji filozoficznej. We wspominanym raporcie można też znaleźć wiele innych interesujących wniosków dotyczących zalet wprowadzenia takich zajęć w edukacji szkolnej. Drugą istotną przesłanką było zdiagnozowanie braku

takich samych (jak wyżej wymienione) kompetencji wśród naszych studentów lat pierwszych na kierunkach filozofia i coaching filozoficzny, a także na innych kierunkach, na których prowadzone są zajęcia z logiki i filozofii. Uznaliśmy zatem za celowe włączenie się do tego konkursu i przeniesienie doświadczeń nabytych w pracy z młodzieżą szkolną na grunt akademicki, by wykorzystać cenne spostrzeżenia w pracy dydaktycznej z naszymi studentami. Trzecią przesłanką, która skłoniła pracowników Instytutu Filozofii do uczestnictwa w tych projektach, była możliwość wydania dla szerokiego grona odbiorców (uczniowie, nauczyciele, rodzice) interesującej pozycji dydaktycznej, która będzie wykorzystana do zwiększenia poziomu kompetencji w zakresie umiejętności „miękkich" takich jak: umiejętność dyskutowania, wyciągania wniosków oraz logicznego myślenia. W naszej opinii rynek wydawniczy nie oferuje książki o profilu zbliżonym do naszej. Można oczywiście nabyć książki, które oferują młodzieży szkolnej (akademickiej) kształcenie logicznego myślenia w formie zabawowej, ale zawierają one w większości przypadków zagadki (zadania) o charakterze logiczno-matematycznym. W tym miejscu serdecznie polecam taką pozycję książkową z roku 2007 o polskim tytule *Przedrzeźniać przedrzeźniacza*, która powstała jako przekład pracy Raymonda Smullyana o tytule *To Mock a Mockingbird and Other Logic Puzzles: Including an Amazing Adventure in Combinatory Logic*, z angielskiego przełożył oczywiście nasz Dostojny Jubilat. Znane są także inne zagadki autorstwa prof. Pogonowskiego umieszczone w kontekście matematycznym zawarte np. w pliku *Wesołe zagadki* dostępnym na stronie internetowej z tekstami online.

Autorzy starali się napisać tę książkę w języku, który będzie przyjazny dla jak największego kręgu odbiorców. Z jednej strony było to zadanie dość trudne, ponieważ książka w dużej części rozważań dotyczy zagadnień logiki, a ta (z racji swojej specyfiki) skazana jest (w znacznej mierze) na posługiwanie się różnego rodzaju formalizmami. Staraliśmy się, wszędzie tam, gdzie tylko to możliwe, omijać symbole logiczne, ale nie zawsze taka opcja była dostępna (np. w przypadku schematów zdań języka potocznego i pokrewnych zagadnień). Z drugiej strony mieliśmy nieco ułatwione zadanie, ponieważ oprócz doświadczeń w pracy naukowo-dydaktycznej na Uniwersytecie Opolskim autorzy tej książki mają także doświadczenie dydaktyczne w pracy z młodzieżą szkolną, a więc w miarę potrzeb stosowano intuicyjne odpowiedniki wielu pojęć. Wiadomo jednak, że intuicja ma swoje plusy i minusy (przypomnę w tym miejscu, że na temat intuicji

bardzo wiele pisał prof. Pogonowski). Z jednej strony może ona stanowić przyczynek dla wielu odkryć, a z drugiej może być złudna i prowadzić nas na manowce. Ufamy jednak, że w tej książce wszelkie intuicje związane z używanymi przez nas zamiennikami pojęć nie będą prowadzić do nieporozumień, ale wyzwalać będą kreatywność i pobudzać do poszukiwania niestandardowych rozwiązań, będąc krokiem w stronę zamierzonego przez nas celu, tzn. kształtowaniu umiejętności krytycznego i samodzielnego myślenia, umiejętności prowadzenia racjonalnej dyskusji (argumentacji). Na razie książka składa się z sześciu rozdziałów, ale w finalnej wersji może być inaczej (trwają jeszcze dyskusje autorów nad ostatecznym kształtem, ale zawartość się nie zmieni). Pierwszy i drugi rozdział jest poświęcony opisowi realizacji projektu wśród uczniów gimnazjów. W tej grupie docelowej projektu szczególną uwagę poświęcono zajęciom warsztatowym. W ramach tych zajęć stosowano tzw. coachingowe metody nauczania, w tym metoda majeutyczna oraz dialog sokratejski. Istota takich metod została scharakteryzowana w rozdziale I. Rozdział II zawiera skrócony opis całego cyklu zajęć, który składał się z 15 modułów tematycznych oraz 5 scenariuszy wybranych zajęć, które mogą stanowić pewnego rodzaju szablon dla realizacji pozostałych tematów modułowych. Rozdział III zawiera opis bardzo istotnych narzędzi logicznych, za pomocą których można weryfikować poprawność wnioskowań. Mówimy tam m.in. o diagramach Venna (które to są także wykorzystywane w nauczaniu matematyki i są bardzo przydatne np. w rachunku zbiorów i rachunku prawdopodobieństwa). Rozdział ten jest napisany w przyjaznym dla ucznia języku. Staraliśmy się ominąć formalizmy typowe dla logiki tam, gdzie było to możliwe. Jednak w przykładach, w których nasze intuicje mogłyby zwieść nas na manowce, zaproponowaliśmy użycie schematów zdań, które w sposób niebudzący wątpliwości rozstrzygają kwestie poprawności wnioskowań. Wprowadziliśmy tam także jedno z najważniejszych pojęć występujących w logice – pojęcie wynikania logicznego, a także ważne w teorii komunikacji pojęcie wynikania konwersacyjnego. Nie tworzyliśmy schematów abstrakcyjnych wnioskowań, ale takie schematy, które dotyczyły wnioskowań umieszczonych w kontekście praktycznym. W rozdziale IV omówiliśmy zastosowanie wcześniej wprowadzonych narzędzi logicznych do analizy problemów związanych z istnieniem Boga, w szczególności do kwestii poprawności dowodów na istnienie Boga. Wątek ten został także poszerzony o pojęcie „zakładu Pascala" oraz o pojęcie użyteczności oczekiwanej, co wymu-

siło także poruszenie zagadnień związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa. Rozdział V ma dosyć szeroką formułę tematyczną, ale ściśle związaną ze sferą krytycznego, samodzielnego myślenia. Omówiliśmy tutaj m.in. problemy dotyczące naszej codziennej wiedzy (jej źródła, jej charakteru), związków o charakterze przyczynowo-skutkowym, rozumowań indukcyjnych. Poruszyliśmy także zagadnienia metodologii badań, takich jak: obserwacja, wyjaśnianie, eksperyment, hipoteza, zasada krytycyzmu. Wszystkie te pojęcia są wkomponowane w sytuacje dnia codziennego – takie, które są faktem i takie, które mogą mieć miejsce. Odnosimy się do bardzo ważnego problemu kierowania się w naszym życiu stereotypami, które deformują nasze myślenie. Nawiązujemy także do bardzo ważnych pojęć filozoficznych, które towarzyszą nam codziennie w naszych interakcjach. Często sobie lub innym zadajemy pytania postaci: Czy w naszym społeczeństwie obowiązuje zasada równości? Kiedy daną sytuację życiową można nazwać dylematem moralnym? Co to jest dobro? Kiedy mamy do czynienia ze sprawiedliwością? Żadnego z tych bardzo ważnych pytań nie pozostawiamy bez odpowiedzi. Podajemy różne rozstrzygnięcia, które zostały zaproponowane przez wielkich uczonych oraz własne przemyślenia. Ostatni, VI rozdział zawiera skrócony opis programu zajęć dla uczniów szkół ponadpodstawowych oraz trzy przykładowe scenariusze zajęć dla uczniów szkół ponadpodstawowych.

Teraz kilka zdań o tych projektach. W Instytucie Filozofii Uniwersytetu Opolskiego powstał zespół w składzie: prof. Iwona Alechnowicz-Skrzypek, prof. Adam Grobler, prof. Robert Sochacki oraz dr Piotr Leśniak do opracowania programu odpowiednich zajęć. Powstały ostatecznie dwa różne programy zajęć – jeden dla uczniów gimnazjum, a drugi dla uczniów liceum. Każdy z nich przewidywał po 30 godzin lekcyjnych zajęć, które miały być zrealizowane w trakcie trwania roku szkolnego. Każda grupa uczniów mogła liczyć maksymalnie 20 uczestników. Podczas zajęć były stosowane głównie metody aktywizujące pozwalające na realizację zamierzonych celów. Założyliśmy, że efektem realizacji tych projektów powinno być przede wszystkim:

– pobudzenie u uczniów ciekawości poznawczej,
– poprawa umiejętności analizy i syntezy,
– wykształcenie umiejętności poprawnego wnioskowania,
– wykształcenie umiejętności poprawnej argumentacji,

– rozwinięcie zdolności do zadawania pytań i podejmowania prób odpowiedzi na nie, z uwzględnieniem różnych punktów widzenia.

Metody i formy prowadzenia zajęć były dobierane adekwatnie do potrzeb uczestników tego projektu, tj. były zgodne z potrzebami wynikającymi z ich wieku rozwojowego i poziomu poznawczego. Najważniejszymi składnikami obu programów zajęć były ćwiczenia i warsztaty aktywizujące samodzielne myślenie. Intencją autorów obu programów nie było zwiększenie za wszelką cenę poziomu wiedzy z logiki czy też z filozofii, ale praktyczne wykorzystanie narzędzi, które te dwie dziedziny wiedzy oferują. Głównym celem realizowanych tematów było ćwiczenie krytycznego myślenia w konkretnych sytuacjach problemowych. Dzięki takim zajęciom uczniowie mogli doświadczyć, na czym polega analiza problemu, poszukiwanie rozwiązań i ich krytyczna selekcja. Oczywiście, aby wykorzystać konkretne narzędzia w rozwiązywaniu problemów, przewidziano niewielką część zajęć poświęconą wykładom i pogadankom. Dominującą formą zajęć były jednak zajęcia grupowe, których celem (oprócz wymienionych wcześniej) było kształtowanie umiejętności współpracy w ramach grupy, a także rozwój odpowiednich postaw społecznych. Uczniowie, ucząc się pracy zespołowej, dostrzegali pozytywne strony takiej formy działania.

Prawie na zakończenie proponuję jeszcze kilka uwag, które z pełnym zrozumieniem przyjmie nasz Dostojny Jubilat (tak ufam). Co do tego, że wśród uczniów różnego typu szkół występują poważne deficyty w sferze takich umiejętności jak: samodzielne krytyczne myślenie, twórcze myślenie, rozpoznawanie i rozumienie problemów, a także prowadzenie rzetelnej argumentacji, nie musimy chyba nikogo przekonywać. Taki stan rzeczy potwierdził cytowany wcześniej raport Instytutu Badań Edukacyjnych, ale też raport Najwyższej Izby Kontroli z maja 2019 r. Raport NIK dotyczył wyników kontroli w zakresie nauczania matematyki w szkołach. Matematyka jest szczególną dziedziną wiedzy, tak jak logika. Bez logiki nie ma matematyki, ale też liczne umiejętności, które były kształcone w ramach zajęć projektowych, są bardzo przydatne na gruncie matematyki. Wiadomo, że od wielu już lat odchodzi się od sformalizowanych metod rozwiązywania zadań matematycznych. Stawia się teraz raczej na metody heurystyczne, pewnego rodzaju pójście na skróty, ale przy jednoczesnym przestrzeganiu poprawności wynikania jednych zdań z innych. Dlatego wykorzystanie kształconych przez nas umiejętności może okazać się bezcenne na lekcjach matematyki. Zacytujemy tutaj jedną z opinii napisanych na potrzeby ra-

portu NIK (pozwalamy sobie nieco ją zmodyfikować dodając przymiotnik „logiczny" obok zwrotów związanych z matematyką):

> Powszechnie zgadzamy się ze słowami I. Kanta, że żaden kraj z ambicjami nie może być krajem analfabetów matematycznych (logicznych). Z drugiej jednak strony bez sprzeciwu przyjmujemy stwierdzenia polityków, publicystów, dziennikarzy, że matematyki (logiki) nigdy nie rozumieli, a na maturze po prostu ściągali. Dajemy cichą aprobatę publicznemu prezentowaniu niewiedzy czy matematycznej (logicznej) ignorancji. Przecież spośród wielu dziedzin działalności człowieka matematyka (logika) wydaje się najbardziej, poza sztuką, predysponowana do rozwijania myślenia odkrywczego, do wspierania rozwoju jednostki i społeczeństwa. Uniwersalne znaczenie matematyki (logiki) związane jest z abstrakcyjnym rozumowaniem oraz wnioskowaniem, dostrzeganiem, formułowaniem i rozwiązywaniem problemów. Matematyka (logika) daje nam uniwersalne narzędzia poznania[5].

W kontekście powyższego cytatu warto się tutaj odnieść do zajęć prowadzonych w szkołach ponadgimnazjalnych, szczególnie w klasach maturalnych. Okazało się, że narzędzie, które oferuje logika, zwane diagramami Venna (kołami Eulera), pozwala w sposób niezwykle sprytny (jednocześnie subtelny) rozwiązać wiele problemów matematycznych związanych np. z rachunkiem prawdopodobieństwa (dowodzenie twierdzeń dotyczących własności prawdopodobieństwa zdarzeń) czy też innych zadań (poprawność dowodów na istnienie Boga), gdzie modelowanie za pomocą diagramów znacznie upraszczało tok rozumowania i pozwalało na podstawie samego oglądu sytuacji graficznej formułować wiele ciekawych hipotez. Jednym z zaleceń pokontrolnych NIK była sugestia, aby przywrócić w podstawie programowej kształcenia ogólnego elementy logiki, dzięki której kompetencje związane z poprawnym rozumowaniem i argumentacją powinny stać się bardziej powszechne. To, co robiliśmy na zajęciach z młodzieżą szkół licealnych, to właśnie ćwiczenie takich kompetencji, które należało wykorzystać w życiu codziennym, a w dalszej perspektywie na lekcjach matematyki. Fundamentalnym pojęciem, które było omawiane w przeróżnych kontekstach (tych o charakterze matematycznym też, ale rzadko), było pojęcie wynikania jednych zdań (wniosków) z innych zdań zwanych przesłankami. Okazało się, że wiele rozumowań przeprowadzanych na co dzień posiada bardzo wiele wad z punktu widzenia logiki, głównie brak związku wynikania między przesłankami a wnioskiem. Do czego takie ułomności prowadzą, to można sobie obejrzeć lub posłuchać lub przeczytać, szczegól-

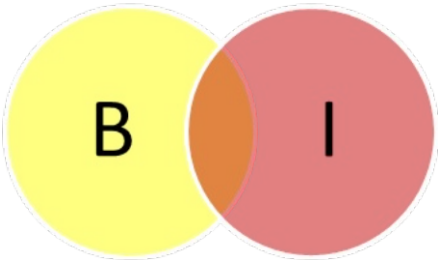
[5] Najwyższa Izba Kontroli, *Informacja o wynikach kontroli. Nauczanie matematyki w szkołach*. V 2019, s. 6.

nie w kampaniach reklamowych czy też wyborczych. Brak jakiejkolwiek wiedzy o elementarnych zasadach szeroko pojętej kultury logicznej prowadzi do chaosu komunikacyjnego i zwykłego bełkotu intelektualnego. Staraliśmy się w sposób bardzo przyjazny (gry, zabawy, praca w grupach, warsztaty, mało liczne grupy, dyskusje, debaty) uczulić młodzież szkolną właśnie na takie zachowania, które mogą prowadzić do przykrych konsekwencji, jeśli tylko zignoruje się pewne zasady, których przestrzeganie zaleca logika (filozofia). Mamy wielką nadzieję, że książka ta, która powstała na bazie doświadczeń w dwuletniej pracy dydaktycznej pracowników Instytutu Filozofii Uniwersytetu Opolskiego z młodzieżą szkolną, przyczyni się do zmian w świadomości wielu młodych ludzi. Książka *Weź to na rozum* nie została jeszcze opublikowana, chociaż już jest od pewnego czasu napisana. Ten poślizg czasowy związany z publikacją wynika w głównej mierze ze zmian, jakie spowodowała pandemia COVID-19. Autorzy ufają jednak, że publikacja nastąpi pod koniec tego roku kalendarzowego albo na początku przyszłego.

Teraz już na zakończenie proponuję mały fragment z tej książki. Będzie w nim mowa o poprawnym rozumieniu słowa „niektóre". Jest to o tyle ważne, że znakomita większość studentów pierwszych lat na zajęciach z logiki oraz uczniów biorących udział w zajęciach zrealizowanych projektów miała zupełnie inne skojarzenia związane z tym pojęciem.

Co to znaczy „niektóre"?

Czy stąd, że niektóre blondynki są inteligentne, można wyciągnąć wniosek, że niektóre nie są? Wydaje się, że tak. Skoro o niektórych blondynkach mówi się, że są inteligentne, to zostają jeszcze jakieś inne blondynki, które są nieinteligentne. Czy na pewno? O tych pozostałych blondynkach, o których nie powiedziano, że są inteligentne, nie powiedziało się przecież, że są nieinteligentne. Nic o nich nie powiedziano. Bez dodatkowych informacji nic o ich inteligencji nie wiadomo. Wniosek, że niektóre blondynki są nieinteligentne, jest nieuzasadniony. Niezależnie od tego, czy jest prawdziwy. Żeby to lepiej zrozumieć, rozważmy zdanie „Kundzia Blond jest inteligentna". Czy stąd można wyciągnąć wniosek, że niektóre inne blondynki są nieinteligentne? Zaraz, zaraz. Jakie inne? Skąd wiadomo, że Kundzia Blond jest blondynką? Nie trzeba przecież być królem, żeby nazywać się



Rysunek 1. Co to znaczy „niektóre”? Ilustracja przykładu z tekstu.

Król, a kto się nazywa Małysz, niekoniecznie jest malutki. No dobra. Nie dałeś się, Czytelniku, nabrać. Załóżmy więc dodatkowo, że Kundzia Blond jest jednak blondynką, przynajmniej na razie, dopóki nie przemaluje się na rudo. Kundzia Blond jest inteligentna. Czy zatem stąd można wyciągnąć wniosek, że niektóre inne blondynki są nieinteligentne? Oczywiście, że nie. Nic o innych blondynkach nie wiadomo. Za to stąd, że Kundzia Blond jest inteligentna, można wyciągnąć wniosek, że niektóre blondynki są inteligentne. Kundzia jest ta niektóra. Jeżeli Kundzia Blond jest inteligentna (i jest blondynką), to co najmniej jedna blondynka jest inteligentna. Zatem „niektóre” znaczy „co najmniej jedna”. Stąd jednak, że co najmniej jedna blondynka jest inteligentna, nie można wnioskować, że co najmniej jedna blondynka jest nieinteligentna. Rzecz można przedstawić na diagramie (rys. 1). Niech koło żółte B reprezentuje zbiór blondynek, zaś koło czerwone I zbiór osób inteligentnych.

Wówczas obszar pomarańczowy – część wspólna koła żółtego i czerwonego – reprezentuje zbiór inteligentnych blondynek. Zdanie „Niektóre blondynki są inteligentne” mówi, że w obszarze pomarańczowym znajduje się co najmniej jedna osoba, na przykład Kundzia Blond. Natomiast nic nie mówi o obszarze żółtym, który reprezentuje blondynki nieinteligentne. Nie jest wykluczone, że nie ma w nim nikogo. Zupełnie tak samo, jak nic nam to zdanie nie mówi o obszarze czerwonym, który reprezentuje inteligentne nie-blondynki, który również może być zupełnie pusty. Z doświadczenia pewnie wiesz, że oba te obszary są niepuste. Co innego jednak jest wiedzieć coś z doświadczenia, a co innego wyciągać wnioski z przesłanki „Niektóre blondynki są inteligentne”. Gdyby żółty obszar był pusty, znaczyłoby to, że wszystkie blondynki są inteligentne. Wszystkie musiałyby się zmieścić

w obszarze pomarańczowym. Zatem **„niektóre" nie znaczy „nie wszystkie"**. Może i wszystkie, dopóki nie dostaniemy informacji przeciwnej. Zdanie „Nie wszystkie blondynki są inteligentne" mówi, że nie wszystkie mieszczą się w obszarze pomarańczowym, jakieś muszą się znaleźć w obszarze żółtym. Stąd rzeczywiście można wywnioskować, że niektóre blondynki są nieinteligentne. Ale, jak powiedziałem, przesłanka się zmieniła. Dlatego zmienił się wniosek. Na marginesie: zmiana przesłanek może prowadzić do zmiany wniosku, ale nie musi.

No dobrze. Skoro stąd, że niektóre blondynki są inteligentne, nie można wnioskować, że niektóre nie są, to dlaczego **nam się wydaje**, że można to wywnioskować? Otóż w pewnym sensie wydaje nam się całkiem dobrze. Zdanie „Niektóre blondynki są inteligentne" **daje nam do zrozumienia**, że niektóre nie są. Ta sugestia bierze się z domniemania, że nasz rozmówca chce nam powiedzieć wszystko, czego chcemy się od niego dowiedzieć. Gdyby wiedział, że wszystkie blondynki są inteligentne, powinien nam o tym powiedzieć. Skoro tego nie mówi, to sugeruje nam, że wedle jego wiedzy nie wszystkie blondynki są inteligentne. Jeżeli wie, ale nie powie, to znaczy, że obojętne mu są jego oczekiwania wobec niego. Zachowuje się podobnie jak ktoś, kto częstuje nas zupą, ale nie daje nam łyżki. Inaczej mówiąc, powiedzieć w rozmowie „Niektóre blondynki są inteligentne" znaczy „Niektóre nie są" lub „Wiem, że wszystkie, ale ci tego nie powiem". Takie pośrednie dawanie do zrozumienia jest w mowie potocznej na porządku dziennym. Kiedy przyszedłem na uczelnię w nowej marynarce, kolega na mój widok powiedział: „Ho, ho, niektórym to się powodzi!". Dał mi w ten sposób do zrozumienia, że innym – przypuszczalnie jemu – powodzi się gorzej. Z jego komentarza jednak nie sposób **wywnioskować logicznie**, że nie wszystkim dobrze się powodzi. Wzięta dosłownie, jego wypowiedź znaczy tylko tyle, że przynajmniej jednej osobie – nawet niekoniecznie mnie – dobrze się powodzi. O innych nie ma mowy wprost. Jest tylko sugestia, której treść na ogół zależy od kontekstu rozmowy. **Logika natomiast mówi o takich związkach między zdaniami, które nie zależą od kontekstu, od sytuacji, w której zostały wypowiedziane**.

Literatura

1. M. Trepczyński, A. Stanaszek, M. Grudniewska i I. Gmaj. *Nauczanie filozofii na III i IV etapie edukacyjnym*. Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa, 2015.

Z logikiem w puszczy

Mirosław Górny

Profesora Pogonowskiego poznałem w roku 1984. Był wtedy na stypendium Humboldta i do Polski przyjechał na krótko. Miałem pracować w jego zakładzie i stąd nasze krótkie spotkanie.

Minęło parę lat – nadeszły kolejne wakacje.

Lubiłem włóczyć się w lecie z namiotem wzdłuż rzek. Zwykle było nas trzech czy czterech, ale czasami jechało tylko dwóch. Trudno było zebrać ludzi którzy akurat mieli czas i którym nie przeszkadzało dźwiganie plecaków i codzienne rozbijanie i zwijanie namiotów. Co więcej – musieli to być ludzie, którym odpowiadały te prymitywne warunki włóczęgi i których charaktery pozwoliły przetrwać bez konfliktu kilkanaście dni razem.

Tego roku zaproponowałem włóczęgę Profesorowi. Przypuszczałem, że jest facetem, który się do takich wypadów nadaje. Nie pomyliłem się w najmniejszym stopniu.

Profesor zgodził się od razu. I tak zaczęły się nasze włóczęgi.

Rzeka

Rzeki mają szczególny urok. Można wędrować wzdłuż brzegu i podziwiać ciągle nowe widoki. I co ważne – zwykle można nad nimi znaleźć wygodne miejsca do biwakowania.

Dzisiaj pewnie wygląda to inaczej. Brzegi są zagradzane i zabudowywane. Wiele malowniczych miejsc zostało bezpowrotnie zniszczonych.

Nie ma już starych chat, na które można było trafić jeszcze 30 lat temu. Ale rzeki płyną dalej. Zapewne trochę czystsze. Często ze śladami licznych obecnie bobrów. A czasem oszpecone kikutami drzew, które nie przeżyły najazdu kormoranów.

Włóczyliśmy się po Załęczu. Warta tam szeroko się rozlewa i tworzy wspaniałe przełomy ze sterczącymi wapiennymi ostańcami.

Brzeg był diabelnie zarośnięty i wydawało się, że drugi brzeg lepiej nadaje się do marszu. Zatem przechodzimy na drugą stronę. Mostu w pobliżu nie było. Rzeka płytka, bo rozlana. Trzeba po prostu ją przekroczyć.

Weszliśmy do wody tak jak maszerowaliśmy. Nikt sobie takimi pierdołami jak ściąganie butów, spodni itd. głowy nie zawracał. . . Robiliśmy tak nieraz. Przechodząc rozlewiska i bagna, nigdy nie zdejmowaliśmy butów, bo oczywiste, że łażenie boso groziło skaleczeniem. A spodnie w letnim upale wysychały błyskawicznie.

Wody było niewiele – sięgała najwyżej do półuda. Idziemy powoli, uważając, żeby nie wpaść do jakiejś dziury. Nagle czuję, że nogi mi się rozjeżdżają.

Kurzawka – niech to szlag!

Odwracam się do Profesora i ryczę – Do brzegu! Szybko!

Stopy już grzęzną, ale daje się jeszcze je wyciągnąć. Jeszcze kilka metrów. Woda zaczyna sięgać pasa. Ale już czuję twardszy grunt. Jeszcze dwa kroki i stoimy po pas w wodzie pod zwisającymi gałęziami. No plaża to nie jest. Ale jednak brzeg. Wdrapujemy się na górę.

Siadamy pod drzewami i zapalamy. Profesor śmieje się bezgłośnie i mówi swoje: „taaaak. . . ”

Warta to była autostrada. Wzdłuż niej prowadziły na ogół ścieżki wydeptane przez wędkarzy i kłusowników, a czasem nawet polne drogi. Ale Gwda, czy taka Błędzianka w Puszczy Rominckiej, to było zwykle przedzieranie się przez krzaki, zapadanie w błoto grząskich brzegów i opędzanie od rojów komarów.

Profesor wówczas mruczał pod nosem

– Taaaak. Wątpię, bardzo wątpię, żebym to przeżył. . .

– Przydałaby się lektyka – odpowiadam.

– Tu nawet w lektyce nie dałoby się przeżyć.

A potem w obozie, stojąc przed namiotem z kubkiem herbaty w dłoni i oczywiście z nieodłącznym papierosem powtarzał: „No pięknie, pięknie. . . ”

Nie ma już starych chat, na które można było trafić jeszcze 30 lat temu.

Woda

Woda zawsze podczas włóczęg była problemem. Picie jej z rzeki na ogół nie wchodziło w grę. Co prawda zdarzało się, że piliśmy rzeczną wodę, uważając, że od biedy nadaje się do picia po kilkunastominutowym gotowaniu, na ogół jednak braliśmy wodę ze studni.

Biwakowało się zwykle daleko od domostw i wodę trzeba było nosić ze sobą. Włóczyliśmy się po Puszczy Rominckiej. Przy samej granicy. Chłopi pracujący na polu wśród lasów mówili: „Panie, tam dalej już niczego nie ma. Tylko granica".

Zapadał zmierzch. Gdzieś ok. dziewiątej wieczorem postanowiliśmy rozbić obóz.

Ale potrzebna była woda. Profesor chwycił kanister i poszedł jej szukać. Po drodze mijaliśmy jakieś strumyki, ale ich brzegi były tak grząskie, że pobranie wody odkładaliśmy do czasu biwakowania.

Profesor zagłębił się w las, a ja zacząłem rozbijać namiot. Minęło z pół godziny, Profesora nie było. Zaczęło się robić ciemno.

Sytuacja nie była wesoła. Wokół był zwarty las. Punktów orientacyjnych brakowało. Bo choć czerwcowy dzień jest długi, to przecież słońce w końcu zachodzi.

A my byliśmy w pasie granicznym, w którym w czasach PRL nie wolno było przebywać bez przepustek.

Mija prawie godzina – nawiedza mnie widok pokoju w strażnicy WOP. Lampa na biurku, gość w zielonym mundurze i Profesor siedzący naprzeciw. Wydaje mi się, że obaj palili.

Mija kolejny kwadrans i obraz w mojej wyobraźni nieco się zmienia. Na ścianach pokoju pojawiają się plakaty z hasłami pisanymi cyrylicą. I zdaje się, że ustniki papierosów też były trochę inne, takie bardziej płaskie.

Nagle słyszę w lesie trzask łamanych gałązek. Zbliża się. Ciekawe, ilu ich idzie. . .

Na polankę wchodzi Profesor – sam, bez towarzystwa wopistów. Za to z pięciolitrowym kanistrem pełnym wody. Co prawda wrócił zupełnie z innego kierunku niż ten, w którym poszedł. Ale wrócił! I to z wodą.

Jakim cudem po ciemku, bez kompasu, trafił z powrotem do obozu – nie mam pojęcia. On chyba też nie bardzo wiedział.

Wiejski sklep

W czasach PRL, w co bardziej odległych od cywilizacji wsiach ludność kupowała najpotrzebniejsze produkty żywnościowe w tzw. Punktach Sprzedaży Pomocniczej. Były to sklepy mieszczące się w prywatnej chałupie i obsługiwane przez właściciela tejże. Oczywiście ich wystrój i oferowany asortyment były dość ubogie. A godziny otwarcia zależały od intensywności prac polowych. Nieraz zdarzało się nam słyszeć: „Panie, sklepowa tera je w polu. Idźta na pole – i jak jom znajdziecie – to przyńdzie i wom sprzeda".

Ale oczywiście istniały też normalne sklepy. Na ogół jednak kupowanie tam nie należało do łatwych. Chleb bywał raz dziennie i często już go nie było albo jeszcze nie było.

Pamiętam, jak w Grzmiącej (na Pomorzu Zachodnim) czekaliśmy z Profesorem na przywóz chleba pół dnia – nie mając pewności, że dla nas starczy. Bo z nami czekało pół wsi. Oczywiście nikt się nie spieszył i nikt

nie denerwował. Słońce świeciło, muchy leniwie bzyczały – można było poleżeć na trawie, pogadać, usłyszeć plotki, zdrzemnąć się. . .

Jakiś osobnik, widząc nasze plecaki, zaproponował pracę u siebie na budowie. „Chodźcie do mnie na budowę – robota «nie chodzona» i jeszcze zarobicie. Co będziecie za darmo takie ciężary dźwigać".

Jasne jest, że w lecie szukano w tych sklepach czegoś do picia. Z reguły nie było niczego. Choć zdarzał się czasem szampan w czasie żniw (zapewne był to błąd w rozdzielniku).

Dopiero koniec PRL-u przyniósł zmianę. W każdym wiejskim sklepie było piwo. A przedtem jedynie bywało.

Na drodze pojawia się postać w wojskowym szynelu i rogatywce. Twarz zarośnięta trochę, ale widać na niej skupienie i determinację. Ostatnia przeszkoda – cztery stopnie schodów prowadzących do sklepu.

Jakby nie mogli budować tych sklepów trochę niżej! Grawitacja niestety daje znać o sobie – szturm z marszu, odwrót. I znów atak. Za czwartym razem upór i męczące pragnienie triumfują. Szynel, dysząc ciężko, wtacza się do sklepu. Bez zbędnych wstępów przechodzi do rzeczy:

– Piwo jest?!

– Nie ma – odpowiada monotonnym głosem sklepowa.

– Wiadomo – nigdy nie ma. Pani da dwie butelki.

Oczywiście chodziło o butelki wina – bo już ustaliliśmy, że piwa nie było.

Wino w sklepie wiejskim stało zawsze na swoim miejscu w równym szeregu, prezentując dumnie naklejki z eleganckim, zamaszystym napisem „Wino".

Tu musimy młodszym czytelnikom wyjaśnić, że chodziło o wino marki „Wino". Proces produkcji tego napoju różnił się nieco od procesu produkcji klasycznego wina. Otóż alkohol w tym napoju nie pojawiał się w wyniku fermentacji, a w procesie tzw. alkoholizacji, co, mówiąc krótko, oznaczało dodawanie spirytusu do płynu złożonego z wody i soku różnych owoców. W ten sposób produkowano szybciej i taniej, zaspokajając w pełni potrzeby dość licznego społeczeństwa.

Co prawda niektórzy oddzielali potem cenną część tej mieszaniny od bezwartościowej reszty w procesie destylacji, ale większość nabywców nie dysponowała ani odpowiednią aparaturą, ani wystarczającą cierpliwością.

Natomiast nasz kombatant, wsunąwszy obie butelki do przepastnych kieszeni szynela, ostrożnie skierował się do wyjścia, aby „dokładając na-

leżytej staranności" bezpiecznie (wszak na pokładzie znajduje się cenny ładunek) sforsować złośliwie zaprojektowane przez architekta stopnie.

Nie opróżnił butelek zaraz po wyjściu ze sklepu (co było w zwyczaju większości nabywców tego produktu) – tylko wolnym, acz stanowczym krokiem podążał ku swemu przeznaczeniu. Na pierwszym zakręcie przeznaczenie prawdopodobnie zrewidowało swoje plany i szynel spoczął pod drzewem. Tu też opróżnił pierwszą butelkę i po mozolnym procesie stawania na dwóch nogach udał się w dalszą podróż.

Koichi

Kilka razy w wyprawach towarzyszył nam Japończyk – Koichi Kuyama. (Nie będę tutaj przybliżał jego sylwetki, bo obszerne publikacje omawiające jego liczne dokonania i zasługi dla popularyzacji kultury polskiej w Japonii można znaleźć w internecie, m.in. w Wikipedii.)

Koichi był człowiekiem ciekawym świata i nietrudno go było namówić na nasze wyprawy. Poza tym był niezwykle sympatyczny i obaj z Profesorem bardzo go lubiliśmy. Dzielnie znosił spartańskie warunki bytowania i mordercze marsze. Fascynowała go egzotyka PRL-u i po 1989 roku uznał, że Polska przestaje być interesująca, bo stopniowo obejmuje ją uniformizacja świata zachodniego. Czyli wszędzie to samo – coca-cola itd.

Kiedyś włóczyliśmy się wzdłuż Warty w okolicach Śmiełowa (nie mogliśmy ominąć muzeum, bo Koichi był przecież znawcą Mickiewicza).

Dotarliśmy późnym popołudniem do Pyzdr. Upał był spory. Na rynku w Pyzdrach była jakaś knajpa, gdzie liczne towarzystwo raczyło się piwem.

Piwo było beczkowe. Wypiliśmy po kilka kufli i ruszyliśmy szukać miejsca na nocleg. To znaczy poszliśmy nad rzekę szukać miejsca na biwak. Trochę to niestety trwało, bo w pobliżu Pyzdr nie było porządnej ostrogi na rzece. A ja szukałem miejsca, gdzie można było zarzucić wędkę.

Profesor i Koichi z anielską cierpliwością znosili uciążliwości mojego nałogu. Koichi zresztą wybierał się czasem ze mną na ryby i uważał, że jest to doskonały sposób na spędzanie wolnego czasu. Nic się nie robi, a równocześnie stwarza pozory działania, co odpędza wyrzuty sumienia wywołane próżnowaniem. Gdyby jeszcze te ryby brały. . .

Tym razem Koichi przeżywał jednak katusze, bo wypite piwo powodowało, że ledwie mógł iść. I całą drogę głośno wyrzucał sobie, że niepotrzebnie skusił się na kolejny kufel.

Chyba w 1987 roku byliśmy na Bagnach Biebrzańskich. I po dosyć ciężkim przejściu przez trzęsawiska wylądowaliśmy (idąc wzdłuż linii telefonicznej) na leśniczówce u pana Cieślińskiego.

W PRL-u istniało coś takiego jak lasy prywatne, ale podlegały one administracji państwowej. Cieśliński był leśniczym w Zarządzie Lasów Niepaństwowych. Właściciele, chcąc wyciąć drzewo, musieli otrzymać zgodę leśniczego. I właśnie na procedurę wyrażania takiej zgody trafiliśmy.

W wielkiej izbie siedziało paru facetów przy stole. Oczywiste jest zatem, że na stole stała wódka i jakieś konserwy rybne. Bez zbędnych ceregieli zaproszono nas do stołu.

Byliśmy głodni, bo prowiant nam się skończył dobę wcześniej i rano ugotowaliśmy tylko resztki ryżu, które miał w plecaku Koichi.

Poza tym byliśmy też nieźle zmęczeni parogodzinnym marszem przez bagna. Kilka kieliszków wódki szybko nas rozłożyło. Leśniczy i jego interesanci pojechali do lasu, a my zostaliśmy sami.

Przedtem Cieśliński poprosił nas, żebyśmy się rozgościli, a ponieważ był już wieczór, położyliśmy się spać. Leśniczy ostrzegł nas, żebyśmy nie wychodzili na dwór, bo spuścił psy.

W nocy Koichiego obudziło straszliwe pragnienie. Nie mógł w kuchni znaleźć wody, więc postanowił iść do studni. Na szczęście ja też się obudziłem i kazałem mu wracać do łóżka, bo psy leśniczego to nie były ratlerki.

Biedny Koichi, marząc o szklance wody, posłusznie położył się znowu.

Leśniczy wrócił nad ranem, a raczej dowieziono go i złożono na kanapie w kancelarii.

Śniadanie jedliśmy już wszyscy razem, wysłuchując złorzeczeń pod adresem wódki i obietnic, że już nigdy więcej. . .

Wtedy nie było z nami Profesora, ale wspominam o tym m.in. dlatego, że Profesor na leśniczówce Cieślińskiego później bywał. A było to czasy, kiedy o agroturystyce nikt jeszcze nie słyszał. Osobnicy tam się pojawiający i dobrowolnie taplający się w bagnie byli traktowani przez miejscowych jako nieszkodliwy, acz mocno zmutowany dodatek do miejscowej fauny, zdominowanej przez łosie, wilki i zdziczałe bydło.

Benzyna

Benzyna była równie ważna jak woda. Używaliśmy benzynowej maszynki do gotowania. To był radziecki Juwel. Mały, lekki, poręczny i nieskomplikowany. Dlaczego benzyna, a nie gaz?

Bo w tamtych latach nie można było dostać leciutkich kartuszy gazowych. A butla z gazem ważyła parę kilogramów. Poza tym, z nabijaniem butli był problem, a benzynę można było dostać wszędzie.

Juwel pracował na zwykłej benzynie do samochodów. Podobno palił również ropę (nie próbowaliśmy). Nie chciał palić tylko nafty przeznaczonej do prymusów benzynowych i benzyny aptecznej.

Prymus terkotał trzy razy dziennie. Rano przed zwinięciem obozu. W dzień, kiedy robiliśmy przerwę w marszu na obiad, i wieczorem. Ale wieczorem pracował najdłużej. Palnik i ruszt rozżarzały się do czerwoności. A prymus wydawał odgłosy podobne do ryku silnika startującego odrzutowca. Paliły się nawet opary ulatujące zaworem bezpieczeństwa ze zbiorniczka z benzyną. Zawsze dziwiło nas, że to wszystko nie eksplodowało.

Herbaty się nie parzyło, tylko gotowało. Na kipiącą wodę sypało się herbatę i przez kilka minut gotowało. Herbata była ciemna jak kawa, trochę gorzka i miała cierpki posmak. Wieczorne picie herbaty to był rytuał bez końca, bo w ciągu dnia picie ograniczaliśmy. Podczas marszu nie piliśmy w ogóle, bo wychodziliśmy z założenia, że picie w marszu bardzo osłabia. To jest oczywiście sprzeczne z medycznymi zaleceniami i w żadnym wypadku nie należy nas naśladować.

Wiele rzeczy, które robiliśmy, było wbrew zaleceniom. Na przykład benzyna przydawała się nie tylko jako paliwo do prymusa. Służyła również do usuwania kleszczy. Wyjmowało się ich nieraz kilka dziennie. Sposób był bardzo prosty. Smarowało się kleszcza benzyną i po chwili można go było bez trudu odczepić w całości. Nauczyłem się tego od Rosjan, którzy mieli doświadczenia z kleszczami na Syberii.

Park Sołacki

Profesor nie należy do osób wylewnych. Co bardzo u niego cenię. Nigdy nie okazywał szalonego entuzjazmu podczas naszych wyjazdów, ale trudno

mu było ukryć niezadowolenie, kiedy „disneyland" zawłaszczał obszar, na którym spodziewaliśmy się przynajmniej złudzenia braku naszej cudownej cywilizacji.

Tak było w rezerwacie Węże niedaleko Działoszyna. Byłem tam z 10 lat wcześniej. Nie było żywej duszy. Tylko las i jaskinie. Teraz trafiliśmy na wesołe miasteczko – szkolne wycieczki, budki z zapiekankami i wesoła muzyka.

Podobnie było w Stańczykach (słynne wiadukty). Samochody, parkingi, hałas.

Dzisiaj również Bagna Biebrzańskie opanowane są przez turystów. Co krok gospodarstwo agroturystyczne, przewodnicy, kładki na bagnach, drony. Brakuje zdalnie sterowanych łosi, chociaż są na pewno łosie na etacie Parku, których praca polega na pokazywaniu się o określonej godzinie turystom.

Kiedyś wracaliśmy z włóczęgi po Mazurach Garbatych i rozbiliśmy ostatni obóz nad jakimś jeziorem. Niedaleko była wieś, obok drewniane pawilony harcerskiego obozu. Co prawda było pusto, ale mimo to humory mieliśmy wisielcze. Profesor rozejrzał się wokół i pokiwał głową.

– Cholera, zupełnie jak w Parku Sołackim.

Czerwony plecak

Profesor chodził zawsze z czerwonym plecakiem. O ile dobrze pamiętam, kupionym chyba w Londynie. Tak czy owak, plecak był zawsze wypchany do granic możliwości. Co prawda trzymaliśmy się zasady, żeby waga plecaka nie przekraczała 16 kilogramów (takie, wydaje mi się, były limity na bagaże lotnicze w latach 70. i chyba stąd się to wzięło). Ale w praktyce nasze plecaki ważyły więcej.

Noszenie nie było problemem. Jak się już maszerowało, to jakoś szło. Szczególnie wtedy, kiedy droga była łatwa. Potrafiliśmy wtedy maszerować godzinami, nie robiąc postojów. Profesor często szedł pierwszy, zatopiony w myślach. Widziałem przed sobą czerwony plecak i jego miarowy krok.

Gorzej było, kiedy trzeba było przedzierać się przez zabagniony i zakrzaczony teren. No i najtrudniejsze było zakładanie ciężkiego plecaka.

Czekaliśmy chyba na autobus do Sieradza. Autobus podjechał, Profesor zarzucił plecak na grzbiet i skrzywił się z bólu. Niestety, kontuzja okazała się poważna.

To była nasza ostatnia wspólna włóczęga. Pozostały wspomnienia i świadomość przemijania. . .

Mirosław Górny

Część II.
Pracownik Jerzy Pogonowski

W tej części prezentujemy dorobek prof. Jerzego Pogonowskiego. Załączone tutaj listy – publikacji, sporządzonych recenzji, wypromowanych doktoratów oraz projektów badawczych, w których prowadzeniu brał udział Jubilat – zostały opracowane na podstawie redagowanej przez Niego strony internetowej `http://logic.amu.edu.pl/index.php/Jerzy_Pogonowski_-_Curriculum_Vitae`.

Lista publikacji

1976

1. Review of: Volker Beeh *Ansätze zu einer wahrheitswertfunktionalen Semantik*. Max Hueber Verlag, München 1973. In: *Studia Germanica Posnaniensia* **V**, 151–153 (in German).

1977

2. A statement in the discussion „Structuralistic methodological postulates in the investigation of culture". *Studia Metodologiczne* **16**, 83–85 (in Polish).
3. Kilka propozycji dotyczących formalnego modelu związku przyczynowego (Some proposals concerning a formal model of causality). [Co-author: J. Wiśniewski.] *Studia Filozoficzne* **11**, 89–107.
4. Review of: Volker Beeh *Ansätze zu einer wahrheitswertfunktionalen Semantik*. Max Hueber Verlag, München 1973. In: *Lingua Posnaniensis* **XX**, 163–166 (in English).

1978

5. Topologiczne modele języka (Topological models of language). *Sprawozdania Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk*, Nr **94**, 56–59.
6. O definicji istotności (On the definition of essentiality). *Poznańskie Studia z Filozofii Nauki* **7**, 275–278.
7. A formal approach to causality. [Co-author: J. Wiśniewski.] Poznań *Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*, vol. **4**, No **1**, 74–86.

8. Review of: Walther L. Fischer *Äquivalenz- und Toleranzstrukturen in der Linguistik*. Max Hueber Verlag, München 1973. In: *Lingua Posnaniensis* **XXI**, 187–189 (in English).
9. Review of: Juliusz A. Szrejder *Równość, podobieństwo, porządek*. Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1975. In: *Studia Metodologiczne* **17**, 183–185 (in Polish).

1979

10. Formal methods in linguistics. *Buffalo Papers in Linguistics*, vol. **1**, No **3**, 31–83.
11. Tolerances in linguistics. *Abstracts of the 6th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, section 12, Hannover, 187–191.
12. Mathematical model of linguistic analysis. *Studia Anglica Posnaniensia* **X**, 123–130.
13. Local properties of texts. *Studia Anglica Posnaniensia* **X**, 131–135.
14. Global properties of language levels. *Studia Anglica Posnaniensia* **XI**, 143–150.
15. Topology and semantics. *Lingua Posnaniensis* **XXII**, 75–85.
16. O aksjomatycznych opisach języka naturalnego (On axiomatic descriptions of natural language). *Lingua Posnaniensis* **XXII**, 37–41.

1980

17. Fuzzy models of language. *Lingua Posnaniensis* **XXIII**, 159–162.

1981

18. *Tolerance spaces with applications to linguistics*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 103 pages.
19. *An axiom system for hypotaxis. Working Papers of the Institute of Linguistics*, Adam Mickiewicz University, Poznań, 28 pages.

1982

20. *Wstęp do językoznawstwa* (Introduction to linguistics). [Co-authors: J. Bańczerowski and T. Zgółka.] Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 356 pages.
21. Set-theoretical approach to general systems theory. In: R. Trappl (Ed.) *Cybernetics and Systems Research*, North-Holland Publishing Company, 15–18.

22. Semiotyczna charakterystyka języka genetycznego (Semiotic characterization of genetic language). *Poznańskie Studia z Filozofii Nauki* 7, 53–62.
23. A note on structural lexical semantics. *Lingua Posnaniensis* **XXV**, 45–51.
24. Review of: Jerzy Bańczerowski *Systems of semantics and syntax. A determinational theory of language*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa-Poznań 1980. In: *Lingua Posnaniensis* **XXV**, 121–131 (in English).
25. Review of: Barbara Hall Partee *Fundamentals of Mathematics for Linguistics*. D. Reidel Publishing Company, Dortrecht-London 1978. In: *Lingua Posnaniensis* **XXV**, 131–132 (in English).

1983

26. Semantic gaps. *Abstracts of the 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, section 12, Salzburg, 346–348.
27. *Kilka obserwacji na temat struktury języka ningueño i konsekwencje dla teorii lingwistycznej (Some observations concerning the structure of ningueño and the consequences for linguistic theory)*. [Co-author: A.F. Majewicz.] *Working Papers of the Institute of Linguistics*, Adam Mickiewicz University, Poznań, 21 pages.
28. *Zbiór zadań z lingwistyki (Linguistic exercises). Practical Aids of the Institute of Linguistics*, Adam Mickiewicz University, Poznań, 17 pages.
29. Extensional approach to lexical semantics. *Lingua Posnaniensis* **XXVI**, 41–54.
30. O pojęciu relacji językowej (On the concept of a linguistic relation). *Studia Semiotyczne* **XIII**, 133–141.
31. Semiotyczne aspekty genetyki molekularnej (Semiotic aspects of molecular genetics). *Kosmos* **3**, 425–431.
32. On categorial marking in natural language. [Co-author: A.F. Majewicz.] *Lingua Posnaniensis* **XXVI**, 55–68.

1984

33. Pojęcie signifikacji (The concept of signification). *Sprawozdania Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk*, No **100**, 140–142.

34. Pojęcie przystosowania populacji (On the concept of fitness of a population). [Co-author: K. Łastowski.] *Poznańskie Studia z Filozofii Nauki* **8**, 233–244.
35. Review of: Theo Vennemann, Joachim Jacobs *Sprache und Grammatik. Grundprobleme der linguistischen Sprachbeschreibung*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1982. In: *Lingua Posnaniensis* **XXVII**, 167–168 (in English).
36. Review of: Charles Berlitz *Die wunderbare Welt der Sprachen. Fakten, Kuriosa, Geheimnisse*. Paul Zsolnay Verlag, Wien–Hamburg 1982. In: *Lingua Posnaniensis* **XXVII**, 168-170 (in German).

1985

37. A contribution to the theory of linguistic oppositions. *Lingua Posnaniensis* **XXVIII**, 117–135.
38. Grundideen der kombinatorischen Semantik. *SAIS Arbeitsberichte* 8, Christian–Albrechts–Universität Kiel, 133–152.
39. Dziury semantyczne (Semantic gaps). *Poznańskie Studia z Filozofii Nauki* **9**, 243–254.
40. Review of: Hans Heinrich Lieb *Integrational Linguistics, vol. 1, General Outline*. John Benjamins, Amsterdam 1983. In: *LINGUA* ***, 274–279.

1987

40. *Komputerowe programy dydaktyczne i testujące: rachunek zdań (Educational computer programs for propositional calculus)*. [Co-author: S. Gorzeński.] *Practical Aids of the Institute of Linguistics*, Adam Mickiewicz University, Poznań, 57 pages.
41. *Sylogistyka. Komputerowe programy dydaktyczne i testujące (Syllogistics. Educational computer programs)*. [Co-author: S. Gorzeński.] *Practical Aids of the Institute of Linguistics*, Adam Mickiewicz University, Poznań, 97 pages.
42. Similarity relations as a tool for the description of sound systems. *Studia Phonetica Posnaniensia* **I**, 69–79.
43. Review of: Barbara Stanosz *Wprowadzenie do logiki formalnej. Podręcznik dla humanistów*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985. In: *Lingua Posnaniensis* **XXIX**, 163–164 (in English).

1988

44. *Teoretyczne podstawy semiotyki I (Theoretical foundations of semiotics I)*. [Editorship.] Working Papers of the Institute of Linguistics, Adam Mickiewicz University, Poznań, 55 pages.
45. Kraty pojęć (Lattices of concepts). In: 44 above, 33–41.
46. *A formal theory of linguistic oppositions*. Working Papers of the Institute of Linguistics, Adam Mickiewicz University, Poznań, 82 pages.
47. *Combinatory semantics: a contribution to the metatheory of linguistics*. Working Papers of the Institute of Linguistics, Adam Mickiewicz University, Poznań, 14 pages.
48. Semantic engineering. *Semiotic Theory and Practice*, Mouton de Gruyter, Berlin–New York–Amsterdam, 899–907.
49. *Matematyczny model analizy lingwistycznej (Mathematical model of linguistic analysis)*. Working Papers of the Institute of Linguistics, Adam Mickiewicz University, Poznań, 131 pages.
50. *Semantic engineering and the concept of a linguistic type*. Working Papers of the Institute of Linguistics, Adam Mickiewicz University, Poznań, 28 pages.
51. *Lingwistyka a teoria modeli (Linguistics and model theory)*. Working Papers of the Institute of Linguistics, Adam Mickiewicz University, Poznań, 20 pages.
52. Review of: Mark Janse, Hans Borkent (Eds.) *Linguistic Bibliography for the year 1984*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1986. In: *Studia Logica* **XLVII**, **4**, 441 (in English).

1989

53. A comment on Vennemann's ideal typologies. *Lingua Posnaniensis* **XXX**, 23–28.
54. Review of: Roland Hausser *Surface compositional grammar*. Studies in Theoretical Linguistics vol. **4**, Wilhelm Fink Verlag, München 1984. In: *Lingua Posnaniensis* **XXX**, 127–130 (in English).
55. Review of: N.A. Kondrašov, L.F. Koposov, L.P. Ruposova *Sbornik zadač i uprazhnienij po vviedieniu v jazykoznanie*. Prosvieščenie, Moskva 1985. In: *Lingua Posnaniensis* **XXX**, 156–157 (in English).

1990

56. *Struktura logiczna rozumowań lingwistycznych (Logical structure of linguistic inference)*. [Co-editor: T. Zgółka.] Wydawnictwa Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, Poznań, 220 pages.
57. Założenia semantyki kombinatorycznej (Main assumptions of combinatory semantics). In 56 above, 27–43.

1991

58. *Hiponimia (Hyponymy)*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 79 pages.
59. *Hierarchiczne analizy języka (Hierarchical analyses of language)*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 64 pages.

1992

60. A new structuralism in phonology. [Co-authors: Jerzy Bańczerowski and Tadeusz Zgółka.] In: Hans-Heinrich Lieb (Ed.) *Prospects for a new structuralism*. John Benjamins Publishing Company, Amsterdam–Philadelphia, 185–224.

1993

61. *Combinatory Semantics*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 110 pages.
62. *Linguistic Oppositions*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 135 pages.

1994

63. Lingwistyka a teoria modeli (Linguistics and model theory). In: Jerzy Pelc (Ed.) *Znaczenie i prawda. Rozprawy semiotyczne*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 221–231.

1995

64. *Eufonia i Logos. Księga Pamiatkowa ofiarowana Profesor Marii Steffen Batogowej i Profesorowi Tadeuszowi Batogowi (Euphony and Logos. Festschrift offered to Maria Steffen-Batóg and Tadeusz Batóg)*. [Editorship.] Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 696 pages.

65. O pracach naukowych Marii Steffen-Batogowej (Maria Steffen-Batóg's scientific works.) In: 64 above, 15–44.
66. Twórczość naukowa Tadeusza Batoga (Tadeusz Batóg's scientific achievements.) In: 64 above, 45–79.
67. Systemy fonologiczne Tadeusza Batoga (Tadeusz Batóg's phonological systems). In: 64 above, 257-280.
68. *Trzy drobiazgi fonologiczne (Three phonological trifles). Investigationes Linguisticae* Vol. **I**, Institute of Linguistics, Adam Mickiewicz University, Poznań, 7–54.

1996

69. *Przyczynki do metodologii lingwistyki (Contributions to the methodology of linguistics)*. [Co-editor: Tadeusz Zgółka.] Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 168 pages.
70. Przyczynek do logicznej rekonstrukcji typologii strukturalnej. (A contribution to logical reconstruction of structural typology). In: 69 above, 93–108.
71. Review of: Marek Tokarz *Elementy pragmatyki logicznej (Elements of logical pragmatics)*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993. In: *Lingua Posnaniensis* **XXXVII**, 137–139 (in English).
72. Review of: Maria Semeniuk-Polkowska, Lech Polkowski *Matematyka dla humanistów. Elementy matematyki dla studentów nauk humanistycznych i społecznych (Mathematics for humanists. Elements of mathematics for students of human and social sciences)*. Wydawnictwo SBP, Warszawa 1994. In: *Lingua Posnaniensis* **XXXVII**, 141–142 (in English).
73. Review of: Barbara H. Partee, Alice ter Meulen, Robert E. Wall, *Mathematical methods in linguistics*. Studies in Linguistics and Philosophy, vol. **30**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London 1990. In: *Lingua Posnaniensis* **XXXVII**, 140–141 (in English).
74. On the concept of a linguistic constant. *Lingua Posnaniensis* **XXXVIII**, 29–38.

1997

75. *Euphony and Logos*. [Co-editor: Roman Murawski.] Rodopi, Amsterdam–Atlanta, x + 534 pages.

76. Tadeusz Batóg's phonological systems. In: 75 above, 167–197.
77. Scientific works of Maria Steffen-Batóg. In: 75 above, 17–67.
78. Scientific works of Tadeusz Batóg. In: 75 above, 69–133.
79. On a formal approach to *Wortphonologie*. *Lingua Posnaniensis* **XXXIX**, 83–91.
80. O pojęciu stałej lingwistycznej (On the concept of a linguistic constant). In: Z. Krążyńska, Z. Zagórski (Eds.) *Poznańskie Spotkania Językoznawcze*, Tom **II**, Wydawnictwo Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, Poznań, 76–82.
81. Review of: Tadeusz Batóg *Studies in Axiomatic Foundations of Phonology*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 1994. In: *Lingua Posnaniensis* **XXXIX**, 155–157 (in English).
82. Przestrzenie podobieństwa i opozycji (Similarity and opposition spaces). In: M. Omyła (Ed.) *Skłonność metafizyczna. Bogusławowi Wolniewiczowi w darze*. Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 83–95.
83. Translation (English → Polish) of logical items beginning with the letter 'a': Achillesa paradoks, argumentacja, argument, alternatywa, aksjomatyczna metoda, aksjomat, analogia. In: the Polish edition of *Encyclopaedia Britannica*. Wydawnictwo Kurpisz, Poznań.

1998

84. Stałe logiczne a gramatykalizacja informacji (Logical constants and grammaticalization of information). *Japonica Toruniensia* t. **1** – *Język i kultura Japonii*. Toruń, 53–66.

1999

85. Zum Begriff der Opposition in den *Grundzügen der Phonologie*. In: J. Bańczerowski, T. Zgółka (Eds.) *Linguam amicabilem facere. Ludovico Zabrocki in memoriam*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 123–137.
86. Dialog czy sprzeczka? O metodach formalnych w lingwistyce (Dialogue or squabble? On formal methods in linguistics). In: S. Gajda (Ed.) *Dyskurs naukowy – tradycja i zmiana*. Uniwersytet Opolski – Instytut Filologii Polskiej, Opole, 97–101.
87. On metalinguistics. *Volume of abstracts*, 11th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Kraków, 380.

88. O logice i symbolice logicznej (On logic and logical notation). Chapter IV in: W. Maciejewski *Świat języków*. Wielka Encyklopedia Geografii świata, vol. **14**, Wydawnictwo Kurpisz, Poznań, 82–93.
89. Review of: Maria Steffen-Batóg *Studies in Phonetic Algorithms*. Wydawnictwo Sorus, Poznań 1997. In: *Lingua Posnaniensis* **XLI**, 209–213 (in English).
90. A logical reconstruction of a fragment of Wiktor Jassem's acoustic phonetics. *Lingua Posnaniensis* **XLI**, 127–136.
91. Pojęcia: intensji i ekstensji w pracach Romana Suszki (On the concepts of intension and of extension in the works of Roman Suszko). *XLV Conference on the History of Logic*, Kraków, p. 14 [abstract].

2000

92. W sprawie programu badawczego lingwistyki formalnej (Concerning the research program of formal linguistics). In: J. Pelc (Ed.) *Język współczesnej humanistyki*. Polskie Towarzystwo Semiotyczne, Warszawa, 325–335.
93. *Odrzucenie aksjomatu Fregego*. Translation <English → Polish> of: Roman Suszko *Abolition of the Fregean Axiom*. In: R. Parikh (Ed.) Logic Colloquium, Symposium on Logic held at Boston, 1972–73. *Lecture Notes in Mathematics* vol. **453**, 169–239. In: A. Biłat (Ed.) *Stany rzeczy. Sytuacje. Zdarzenia*, vol. **6**, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 13–67.

2001

94. Pojęcia: intensji i ekstensji w pracach Romana Suszki (On the concepts of intension and of extension in the works of Roman Suszko). In: M. Omyła (Ed.) *Idee logiczne Romana Suszki*. Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 73–81.

2002

95. Jak żyć z paradoksem Skolema? (How to live with Skolem's Paradox?). In: J. Brzeziński, A. Klawiter, Th.A.F. Kuipers, K. Łastowski, K. Paprzycka, P. Przybysz [Eds.] *Odwaga filozofowania. Leszkowi Nowakowi w darze*. Wydawnictwo Fundacji Humaniora, Poznań, 581–591.

2003

96. Po co metalogika lingwistom? (What do linguists need metalogic for?) In: S. Gajda (Ed.) *Językoznawstwo w Polsce. Stan i perspektywy*. Polska Akademia Nauk – Komitet Językoznawstwa, Uniwersytet Opolski – Instytut Filologii Polskiej, Opole, 119–126.

2004

97. Translation <Russian → Polish> of: Igor A. Ławrow, Larisa L. Maksimowa *Exercises in set theory, mathematical logic and theory of algorithms*. Fizmatlit, Moscow, 2002. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 316 pages.

2005

98. Agnostyczny jeż w lesie semantycznym. (An agnostic hedgehog in a semantic forest.) [Co-author: Izabela Bondecka-Krzykowska]. In: K. Trzęsicki (ed.) *Ratione et Studio. Profesorowi Witoldowi Marciszewskiemu w darze*. Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok, 191–234.
99. On Some Applications of Extended Mereology. *Acta Universitatis Wratislaviensis* nr **2754**, Seria *Logika* **23**, Wrocław, 89–100.

2006

100. „Okres poznański" w twórczości Romana Suszki. (Roman Suszko's works in logic at the Poznań University (1946–1953).) In: J. Pelc (Ed.) *Sens, prawda, wartość: filozofia języka i nauki w dziełach Kazimierza Ajdukiewicza, Witolda Doroszewskiego, Tadeusza i Janiny Kotarbińskich, Romana Suszki, Władysława Tatarkiewicza*. Biblioteka Myśli Semiotycznej vol. **50**, Polskie Towarzystwo Semiotyczne, Warszawa, 205–229. An electronic version in: *Investigationes Linguisticae* **XIV**, 78–96.
101. Ile jest języków? (How many languages exist?) *Investigationes Linguisticae* **XIV**, 1–12.
102. Badania logiczne na Uniwersytecie Poznańskim w latach 1945–1955. (Logical investigations at the Poznań University in 1945–1955.) [Co-author: Roman Murawski]. *Investigationes Linguisticae* XIV, 68–77.
103. Projekt logiki infinitarnej Ernsta Zermela. (Ernst Zermelo's Project of Infinitary Logic.) *Investigationes Linguisticae* **XIV**, 18–49.

104. How Do Metalogical Concepts Emerge? *Investigationes Linguisticae* **XIV** [abstract].
105. O Tworzeniu (się?) Pojęć Metalogicznych. (On the emergence of metalogical concepts). *Investigationes Linguisticae* **XIV** [abstract].
106. Zermelo i Skolemici. (Zermelo and the Skolemites). *Investigationes Linguisticae* **XIV** [abstract].
107. Heksagonalne Ogrody Logiki. (Hexagonal Logic Gardens). *Investigationes Linguisticae* **XIV** [abstract].
108. Zermelo: a Well Founded Antiskolemism. *Investigationes Linguisticae* **XIV** [abstract].
109. Po co mi logika? Jestem Humanistką! What do I need Logic for? I am a (female) Humanist! *Investigationes Linguisticae* **XIV** [an essay in logic].
110. Santa Claus Connection. *Investigationes Linguisticae* **XIV** [an essay in logic].
111. Konsekwencje Bereszit 2:16. (The consequences of Bereshit 2:16.) Coauthor: Izabela Bondecka-Krzykowska. *Investigationes Linguisticae* **XIV** [abstract, about 60 slides].

2007

112. Translation (English → Polish) of: Raymond Smullyan *To Mock a Mockingbird. And Other Logic Puzzles Including An Amazing Adventure in Combinatory Logic. Książka i Wiedza*, Warszawa, 266 pages.
113. Translation (English → Polish) of: Raymond Smullyan *Forever Undecided. A Puzzle Guide to Gödel. Książka i Wiedza*, Warszawa, 262 pages.

2008

114. Logical investigations at the University of Poznań in 1945–1955. Coauthor: Roman Murawski. In: *Methodisches Denken im Kontext*, P. Bernhard und V. Peckhaus (Eds.), mentis Verlag, Paderborn, 239–254.
115. Questions, Recursion, and Incompleteness. Co-author: Andrzej Wiśniewski. Abstract published in: *Volume of abstracts, Sixth European Congress of Analytic Philosophy*, Jagiellonian University, Institute of Philosophy, 21–26 August, Kraków, p. 101.

116. Zermelo a Szkoła Warszawska. 100 lat aksjomatycznej teorii mnogości. (Zermelo and the Warsaw School. 100 years of axiomatic set theory.) Abstract published in: *VIII Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń*. A. Brożek, J.J. Jadacki (Eds.), Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa, p. 180.
117. Zermelo i geneza logik infinitarnych. (Zermelo and the origin of infinitary logic). Abstract published in: *VIII Polski Zjazd Filozoficzny. Księga streszczeń*. A. Brożek, J.J. Jadacki (Eds.), Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa, 190–191.
118. Metoda rezolucji i tablice analityczne w *Symbolic Logic* Lewisa Carrolla. (Resolution and analytic tableaux in Lewis Carroll's *Symbolic Logic*). *Investigationes Linguisticae* **XVI**, 195–218.

2009

119. Lewis Carroll's resolution and tableaux. In: J. Sytnik-Czetwertyński (ed.) *Rozważania o filozofii prawdziwej*. Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 73–92.
120. Paradox and intuition. In: P. Łobacz, P. Nowak, W. Zabrocki (eds.) *Language, Science and Culture*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań. 279–299.
121. Logical aspects of Janusz Chmielewski's works. Preface in: Janusz Chmielewski *Language and Logic in Ancient China. Collected Papers on the Chinese Language and Logic*, M. Mejor (ed.) Komitet Nauk Orientalistycznych Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 23–30.

2010

122. Remarks on Ancient Chinese Logic. In: Andrew Schumann (ed.) *Logic in Religious Discourse*. Ontos Verlag, 84–103.
123. Diagonalization in double frames. Co-author: Andrzej Wiśniewski. *Logica Universalis* Vol. **4**, Number **1**, 31–39; doi: 10.1007/s11787-010-0012-3
124. Interrogatives, recursion, and incompleteness. Co-author: Andrzej Wiśniewski. *Journal of Logic and Computation* Vol. **20**, Number **6**, 1187–1199; doi: 10.1093/logcom/exq014
125. A note on diagonalization. Co-author: Andrzej Wiśniewski. *Bulletin of the Section of Logic* **39: 3/4**, 123–131.

126. Poznańskie juwenilia logiczne Romana Suszki (Roman Suszko's juvenile logical works written in Poznań). In: T. Buksiński (ed.) *Filozofia na Uniwersytecie w Poznaniu. Jubileusz 90-lecia*, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Filozofii UAM, Poznań, 237–259.
127. Argumentacje logików starochińskich. (Argumentation in Ancient Chinese Logic.) In: W. Suchoń, I. Trzcieniecka-Schneider, D. Kowalski (eds.) *Argumentacja i racjonalna zmiana przekonań. DiaLogikon* vol. **15**, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 159–195.
128. *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie? Księga Pamiatkowa ofiarowana Profesorowi Romanowi Murawskiemu (The Worlds of Mathematics. Creation or Discovery? Festschrift offered to Professor Roman Murawski)*. Izabela Bondecka-Krzykowska, Jerzy Pogonowski (eds.), Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 366 pages.
129. Naukowe *curriculum vitae* Romana Murawskiego (Scientific *curriculum vitae* of Roman Murawski). Co-author: Izabela Bondecka-Krzykowska. In: 128 above, 25–67.
130. O pracach matematycznych Romana Murawskiego (On mathematical works by Roman Murawski). In: 128 above, 69–98.
131. Aksjomaty ograniczenia w teorii mnogości (Axioms of restriction in set theory). In: 128 above, 297–325.

2011

132. Wielokropek (Triple dots). *Folia Scandinavica Posnaniensia* **12**, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 211–229.
133. Aksjomaty ekstremalne i modele zamierzone teorii (Extremal axioms and intended models of a theory). *Studia z Kognitywistyki i Filozofii Umysłu* **5** (**1**), 27–59.
134. Remarks on Intended Models of Mathematical Theories. *Lingua Posnaniensis* **LIII** (**2**), 83–100.
135. Intuicja matematyczna – kilka uwag (Mathematical intuition – a few remarks). *Investigationes Linguisticae* **XXIII**, 82–105.
136. Geneza matematyki wedle kognitywistów (The origin of mathematics according to cognitive scientists). *Investigationes Linguisticae* **XXIII**, 106–147.
137. Operacje na argumentacjach (Operations on arguments). *Investigationes Linguisticae* **XXIII**, 148–169.

138. Translation (German → Polish) of: Hilbert, D. 1900. Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8**, 1900, 180–184. In: *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **IV**, 41–44.

2012

139. Kilka uwag o intuicji matematycznej (A Few Remarks about Mathematical Intuition). *Filozofia Nauki* Rok XX, Nr **2** (78), 107–113.
140. Intuicja matematyczna w działaniu (Mathematical intuition in action). In: J. Golińska-Pilarek, A. Wójtowicz (eds.) *Identyczność znaku czy znak identyczności? Księga jubileuszowa dedykowana Profesorowi Mieczysławowi Omyle z okazji siedemdziesiątej rocznicy urodzin*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2012, 139–151.
141. Preface to: J. Golińska-Pilarek, A. Wójtowicz (eds.) *Identyczność znaku czy znak identyczności? Księga jubileuszowa dedykowana Profesorowi Mieczysławowi Omyle z okazji siedemdziesiątej rocznicy urodzin*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2012, 7–10.

2013

142. Cztery monografie Romana Murawskiego (Four monographs by Roman Murawski). Review of:

    1. Roman Murawski. *Essays in the Philosophy and History of Logic and Mathematics*. Rodopi, Amsterdam–New York 2010. Volume 98 in: *Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities*. Preface: Jan Woleński. 343 pages. ISBN 978-90-420-3090-9, ISSN 0303-8157.

    2. Roman Murawski. *Logos and Máthēma. Studies in the Philosophy of Mathematics and History of Logic*. Peter Lang GmbH Internationaler Verlag der Wissenschaften, Frankfurt am Main 2011. Series: *Polish Contemporary Philosophy and Philosophical Humanities* **1** (edited by Jan Hartman). 338 pages. ISBN 978-3-631-61804-2, ISSN 2191-1878.

    3. Thomas Bedürftig, Roman Murawski. *Philosophie der Mathematik*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin–New York 2010. 322 pages. ISBN 9783-11-019093-9, e-ISBN 978-3-11-022060-5.

    4. Roman Murawski. *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*. Monografie Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu

Mikołaja Kopernika, Toruń 2011, 253 pages. ISBN 978-231-832670-6. In: Filozofia Nauki, Rok XXI, Nr 2 (82), 185–200.
In: Filozofia Nauki, Rok XXI, Nr 2 (82), 185–200.

143. Matematyczne fantazje kognitywistów (Mathematical phantasies of cognitive scientists). In: J. Juchnowski, R. Wiszniowski (eds.) *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*. Wydawnictwo Adam Marszałek, Toruń, Vol. 2, 117–127.
144. Translation (German → Polish) of: Hölder, O. 1901. Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe* **53**, Leipzig, 1–63. Erster Teil: Grössen und Masszahlen, 1–36, §§ 1–5. In: *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **V**, 143–152.

2014

145. The Polish School of Argumentation: A Manifesto. Co-author, with Katarzyna Budzyńska et. al. *Argumentation* vol. **28**, issue 3, 267–282.
146. Twórcza rola patologii w matematyce (Creative role of pathologies in mathematics). *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **VI**, 101–121.
147. Translation (German → Polish) of: Heine, E. 1872. Elemente der Functionenlehre. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* **74**, 172–188. In: *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **VI**, 153–166.

2015

148. Matematyka i Humanistki (Mathematics and the Humanists). In: R. Murawski (Ed.) *Filozofia matematyki i informatyki*. Copernicus Center Press, Kraków, 273–290.
149. Translation (German → Polish) of: Weber, H. 1895. *Lehrbuch der Algebra. Einleitung*. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1–20. In: *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **VII**, 141–154.

2016

150. Dwie uwagi o języku matematyki (Two remarks about the language of mathematics). In: Kurpaska, M., Wicherkiewicz, T., Kanert, M. (Eds.)

Thesaurus Gentium & Linguarum. A Festschrift to honour Professor Alfred F. Majewicz. Jeżeli P To Q, Poznań 2016, 295–304.

151. Pojęciowy obraz świata w matematyce (A conceptual world-view in mathematics). In: Wach, S., Buczek, K., Knapik, A., Chruszczewski, P. (Eds.) *Język, Kultura, Komunikacja*. Prace Komisji Nauk Filologicznych Oddziału Polskiej Akademii Nauk we Wrocławiu, Vol. **IX**, Wrocław 2016, 181–191.
152. Co to jest dobry argument? Metoda dyskursu eksperckiego w badaniach nad argumentacja (What is a good argument? The method of expert discourse in argumentation research). Co-authors: Krzysztof Szymanek, Katarzyna Budzyńska, Janusz Czelakowski, Arkadiusz Drukier, Andrzej Grabowski, Magdalena Kacprzak, Barbara Konat, Marcin Koszowy, Piotr Lewiński, Paweł Łupkowski, Marek Magdziak, Michał Paździora, Magdalena Ryszka-Kurczab, Jolanta Rytel, Marcin Selinger, Bartłomiej Skowron, Irena Trzcieniecka-Schneider, Mariusz Urbański, Krzysztof A. Wieczorek, Natalia Żyluk. *Zagadnienia naukoznawstwa*, Tom **LII**, Zeszyt 3 (209), 313–330.
153. Kontekst przekazu w matematyce (The context of sharing mathematical knowledge, skills and abilities). *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **8**, 119–137.
154. Translation (German → Polish) of: Cantor, G. 1872. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* **5**, 123–132. In: *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **8**, 169–177.
155. Review of: Charles Parsons *Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century: Selected Essays*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2014, xii+350 pages. In: *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **8**, 185–187.

2017

156. On conceptual metaphors in mathematics. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **9**, 85–98.
157. Translation (German → Polish) of: Richard Dedekind *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1872.

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia **9**, 169–183.

2018

158. Intuicje a nabywanie wiedzy matematycznej (Intuitions and acquisition of mathematical knowledge). In: Murawski, R., Woleński, J. (Eds.) *Problemy filozofii matematyki i informatyki*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 147–154.
159. Paradox resolution as a didactic tool. In: Błaszczyk, P., Pieronkiewicz, B. (Eds.), *Mathematical Transgressions 2015*, Universitas, Kraków, 324–339.
160. Językowy obraz świata: języki logiki formalnej (Linguistic world view: languages of formal logic). In: Króliczak, G., Łastowski, K., Przybylski, Ł., Przybysz, P., Urbański, M. (Eds.) *Filozof w krainie umysłów. Profesorowi Andrzejowi Klawiterowi w darze*. Wydawnictwo Naukowe Wydziału Nauk Społecznych UAM, Poznań, 323–335.
161. Seweryna Łuszczewska-Rohmanowa. Co-author: Roman Murawski. In: Garrido Á., Wybraniec-Skardowska U. (Eds.), *The Lvov-Warsaw School. Past and Present*. Studies in Universal Logic. Birkhäuser, Cham, 241-247.
162. Jak nauczać logiki formalnej? (How to teach formal logic?). In: Janeczek, S., Tkaczyk, M., Starościc, A. (Eds.) *Logika*. Vol. II: *Kultura logiczna*. Wydawnictwo KUL, Lublin, 281–295.
163. Intuitive explanations of mathematical ideas. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **10**, 123–137.
164. Translation (German → Polish) of: Lew Pontriagin, Über stetige algebraische Körper. *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. **33**, No. **1**, 1932, 163–174. In: *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **10**, 191–201.

2019

165. *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects*. Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM, Poznań, 319 pages.

166. Remarks on the principle of permanence of forms. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **11**, 105–119.
167. Translation (German → Polish) of: Emil Artin, Otto Schreier, Algebraische Konstruktion reeler Körper (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5, 1926, 85-99). In: *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **11**, 131–144.

2020

168. *Myślenie matematyczne. Drobne eseje przedemerytalne (Mathematical thinking. Tiny pre-retirement essays)*. Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM, Poznań, 154 pages.
169. *Essays on mathematical reasoning. Cognitive aspects of mathematical research and education*. Lit Verlag, Berlin–Münster–London–Wien–Zürich, 114 pages.
170. A note on intended and standard models. *Studia Humana* 9(3–4), 131–139.
171. Intuicja w dydaktyce matematyki [Intuition in mathematical education]. In: Jan Gałuszka (ed.), Aleksander Gemel, Bożena Nadrowska, Jerzy Pogonowski, Robert Sochacki *Myślenie matematyczne. Podstawy, rozwój, edukacja [Mathematical thinking. Foundations, development, education]*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 41–54.
172. Oswajanie patologii matematycznych [Domestication of mathematical pathologies]. *Principia* 67. In print.

2021

173. *Postulaty i metafory. Dwie wizje podstaw matematyki (Postulates and metaphors. Two views on the foundations of mathematics)*. Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM, Poznań, 154 pages.
174. The brave mathematical ant. In: Szymon Chlebowski (ed.) *Glimpses into the world of mathematics. A cognitive perspective*. Lit Verlag, Zürich, 65–115.
175. Degrees of accessibility of mathematical objects. In: Szymon Chlebowski (ed.) *Glimpses into the world of mathematics. A cognitive perspective*. Lit Verlag, Zürich, 117–140.

176. Poznanie geometryczne z kognitywnego punktu widzenia [Geometric cognition from a cognitive point of view]. Review of: Mateusz Hohol *Foundations of geometrical cognition*, Routledge, London and New York 2020. In: *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, 20 pages. In print.

Lista recenzji

Lista obejmuje recenzowane prace doktorskie (D) i habilitacyjne (H) od 1999 roku, a także recenzje wniosków o nadanie tytułu profesora (P). W przypadku doktoratów podano nazwisko promotora. Wszystkie stopnie kandydaci uzyskali bądź w dziedzinie filozofii (**F**), bądź językoznawstwa (**J**), a ostatnio także w dziedzinie nauk o poznaniu i komunikacji społecznej (**E**). Jedyny wyjątek to rozprawa informatyczna 2001, 3.

2019

1. Jan Woleński: wniosek o nadanie tytułu doktora *honoris causa* Uniwersytetu Łódzkiego.
2. Magdalena Krzyżanowska: *Epistemic Modality in Amharic*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Jerzy Bańczerowski.

2018

1. Beata Piecuch-Ożarska: *Podręcznik do matematyki jako gatunek tekstu – na przykładzie amerykańskich podręczników używanych w szkole średniej*. (D) (**J**), Uniwersytet Opolski. Dorota Brzozowska.

2017

1. Szymon Frankowski: *Wielowartościowość w logikach modalnych i lingwistyce formalnej*. (H) (**F**), Uniwersytet łódzki.

2. Paweł Łupkowski: *Logic of Questions in the Wild. Inferential Erotetic Logic in Information Seeking Dialogue Modelling*. (H) (**E**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

2016

1. Rafał Gruszczyński: *Niestandardowe teorie przestrzeni*. (H) (**F**), Uniwersytet Mikołaja Kopernika.
2. Joanna Golińska-Pilarek: *Wnioskowania w logikach nieklasycznych: systemy dedukcyjne, rozstrzygalność, procedury decyzyjne*. (H) (**F**), Uniwersytet Warszawski.

2015

1. Rafał Palczewski: *Wiedza w kontekstach. W obronie kontekstualizmu epistemicznego*. (H) (**F**), Uniwersytet Mikołaja Kopernika.

2013

1. Andrzej Krzysztof Rogalski: *Logika języka a gramatyka. Gramatyka spekulatywna a wybrane współczesne teorie lingwistyczne*. (H) (**F**), Katolicki Uniwersytet Lubelski.
2. Krzysztof Wójtowicz: *O pojęciu dowodu matematycznego*. (P) (**F**), Uniwersytet Warszawski.

2011

1. Robert Sochacki: *Metody refutacyjne w badaniach nad systemami logicznymi*. (H) (**F**), Uniwersytet Wrocławski.
2. Michał Tyburski: *Rachunek stanów: modelowanie systemów dynamicznych w logice*. (D) (**F**), Uniwersytet Wrocławski. Jacek Hawranek.
3. Krystian Jobczyk: *Twierdzenie Löwenheima-Skolema i kwestia jego filozoficznej użyteczności*. (D) (**F**), Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego. Stanisław Krajewski.

2010

1. Tomasz Kowalski: *Habilitacja na podstawie całości dorobku naukowego w dziedzinie logiki*. (H) (**F**), Uniwersytet Jagielloński.
2. Janusz Bień: *Problemy formalnego opisu składni polskiej*. (P) (**J**), Uniwersytet Warszawski.

2009

1. Janusz Maciaszek: *Znaczenie, prawda, przekonania. Problematyka znaczenia w filozofii języka*. (H) (**F**), Uniwersytet łódzki.

2008

1. Wojciech Dzik: *Unification types in logic*. (H) (**F**), Uniwersytet Warszawski.

2007

1. Władysław Zabrocki: *Psychologizm i socjologizm w dziejach transformacyjno-generatywnej refleksji nad językiem*. (H) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
2. Piotr Łukowski: *Paradoksy*. (H) (**F**), Uniwersytet łódzki.

2006

1. Dorota Leszczyńska: *Metoda dowodów sokratycznych dla normalnych modalnych rachunków zdaniowych*. (D) (**F**), Uniwersytet Zielonogórski. Andrzej Wiśniewski.
2. Renata Botvina: *The perfect language – the perfect state. Francis Bacon and the dawn of the universal language movement in England*. (D) (**J**), Uniwersytet w Białymstoku. Halina Święczkowska.
3. Robert Piechowicz: *Relacja bliskości znaczeń na poziomie leksyki*. (D) (**F**), Papieska Akademia Teologiczna, Kraków. Michał Heller.

2005

1. Piotr Wasilewski: *O wybranych relacjach podobieństwa i ich zastosowaniach w naukach kognitywnych*. (D) (**F**), Uniwersytet Jagielloński. Jerzy Perzanowski.
2. Ewa Jarmołowicz-Nowikow: *Niewerbalne akty mowy. Empiryczne badania pragmalingwistyczne*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Tadeusz Zgółka.
3. Wu Wei-Ching: *The liberated journey of transcending life and death. Research of Zhuangzi's views on life and death and his idea of the liberated journey. Studies*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Alfred Majewicz.

2004

1. Joanna Grygiel: *The concept of gluing for lattices*. (H) (**F**), Uniwersytet Wrocławski.

2003

1. Marek Nowak: *Formalna reprezentacja pojęcia sądu dla zastosowań w teorii aktów mowy*. (H) (**F**), Uniwersytet łódzki.
2. Tomasz Puczyłowski: *Zastosowanie formalnych ujęć implikatury do analizy wybranych problemów epistemologicznych*. (D) (**F**), Uniwersytet Warszawski. Mieczysław Omyła.

2002

1. Agnieszka Krzemińska: *Pragmalingwistyczne środki perswazji języka polityki*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Tadeusz Zgółka.

2001

1. Mariusz Urbański: *Tabele syntetyczne a logika pytań*. (D) (**F**), Uniwersytet Zielonogórski. Andrzej Wiśniewski.
2. Andrzej Pietruszczak: *Metamereologia*. (H) (**F**), Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu.
3. Roman Matuszewski: *Computer checked mathematical texts presented in natural language*. (D), Politechnika Wrocławska. Nostryfikacja dyplomu (informatyka).
4. Maciej Gaca: *Czasowy model świata w piktografii ludu Naxi*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Alfred Majewicz.

1999

1. Piotr Wierzchoń: *Ku gramatyce deklinacyjnej języka polskiego. Teoretyczne i praktyczne aspekty formalizacji opisu fleksyjnego*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Jerzy Bańczerowski.
2. Krzysztof Wieczorek: *Skuteczność komunikacji w perspektywie teorii aktów mowy*. (D) (**F**), Uniwersytet Śląski. Marek Tokarz.

3. Dorota Brzozowska: *Językowo-kulturowe aspekty dowcipów polskich i angielskich*. (D) (**J**), Uniwersytet Opolski. Stanisław Gajda.
4. Halina Święczkowska: *Harmonia linguarum. Język i jego funkcje w filozofii Leibniza*. (H) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

1998

1. Maciej Karpiński: *Psycholingwistyczne aspekty komunikacji człowiek-komputer*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Piotra Łobacz.

1997

1. Mieczysław Omyła: wniosek o nadanie tytułu profesora nauk humanistycznych (P) (**F**), Uniwersytet Warszawski.

1993

1. Krzysztof Szymanek: Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. (D) (**F**), Uniwersytet Śląski. Marek Tokarz.
2. Jerzy Łacina: *Teoretyczne podstawy budowy arabsko-polskiego słownika rekurencyjnego*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Alfred Majewicz.

1990

1. Wiesław Banyś: *Théorie sémantique et Si. . . Alors. Aspects sémantico-logiques de la proposition conditionelle*. (H) (**J**), Uniwersytet Warszawski.
2. Andrzej Wójcik: *Presupozycje w pragmatyce formalnej*. (D) (**F**), Uniwersytet Śląski. Marek Tokarz.
3. Zygmunt Vetulani: *Lingwistyczne problemy komunikacji człowiek-maszyna w języku naturalnym*. (H) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

1986

1. Jerzy Bogucki: *Angielski i polski język nauki – próba sformalizowanej i kontrastywnej analizy akapitu w tekstach naukowych*. (D) (**J**), Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. (D) (**J**), Uniwersytet Warszawski.

2. IZABELA SOBCZAK: *Z zagadnień rozwoju słowotwórstwa jako podstawy analizy semantycznej wyrazu*. (D) (**J**), Uniwersytet Warszawski.

„Superrecenzje" dla CK

W tych przypadkach nie ujawnia się danych osobowych. Pracownik Pogonowski wykonał kilka takich recenzji (**F**), (**J**).

Lista wypromowanych doktoratów

1. Michał Lipnicki: *Językowe i filozoficzne uwarunkowania logiki buddyjskiej*. Instytut Językoznawstwa UAM, 2014.
2. Victoria Kamasa: *Językowa definicja sytuacji w tekstach katolickich rytuałów obrzędów przejścia*. Instytut Językoznawstwa UAM, 2010.
3. Marcin Junczys-Dowmunt: *Niemieckie rzeczowniki złożone i ich polskie odpowiedniki. Automatyczna ekstrakcja, analiza i weryfikacja na podstawie korpusów równoległych*. Instytut Językoznawstwa UAM, 2009.
4. Sławomir Sikora: *Pragmatyczna analiza spójników prawdziwościowych*. Instytut Językoznawstwa UAM, 2000.
5. Włodzimierz Lapis: *Wybrane problemy algorytmizacji i automatyzacji opisów fonologicznych*. Instytut Językoznawstwa UAM, 1999.
6. Anna Pietryga (*née* Luchowska): *Model uniwersalnej matrycy semantycznej i jego filozoficzne implikacje*. Instytut Filozofii UAM, 1994.
7. Dorota Lipowska (*née* Tomczak): *Metody komputerowej analizy języka naturalnego*. Instytut Językoznawstwa UAM, 1988.

Udział w projektach badawczych

1. **Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne** (kierownik).

   2016–2018. Narodowe Centrum Nauki (OPUS). Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM (Instytut Psychologii, Wydział Nauk Społecznych).

2. **Ciągłość i liczby rzeczywiste. Eudoksos – Dedekind – Conway** (wykonawca).

   2010–2012. Kierownik: prof. Piotr Błaszczyk, Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie.

3. **KBN 2H01A 00725 Metody nieskończonościowe w teorii definicji** (wykonawca).

   2004–2006. Kierownik: prof. Janusz Czelakowski, Instytut Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Opolski.

4. **1H01A 01116 Logika niefregowska. Podstawy i zastosowania** (wykonawca).

   2001. Kierownik: prof. Mieczysław Omyła, Zakład Logiki, Uniwersytet Warszawski.

5. **CPBP 08.15. Struktura logiczna rozumowań niesformalizowanych** (wykonawca).

   1986–1990. Kierownik: prof. Ryszard Wójcicki, Instytut Filozofii i Socjologii PAN.

ISBN 978-83-66666-70-2
DOI 10.48226/978-83-66666-70-2